Kapitel 5

Komplexe Zahlen

5

5

Zusätzliche Abschnitte auf der Homepage

5 Komplexe Zahlen

Die komplexen Zahlen stellen bei der Beschreibung von elektrischen Wechselstromschaltungen ein unverzichtbares Hilfsmittel dar. Fast jedes Lehrbuch über die Beschreibung von elektrischen Schaltkreisen hat als einleitendes Kapitel eine Einführung in die komplexen Zahlen. Einer der Gründe liegt darin, dass einfache Regeln von Gleichstrom-Netzwerken sich auf Wechselstrom-Schaltungen übertragen, wenn man komplexe Widerstände einführt.

Hinweis: Auf der Homepage befindet sich ein zusätzlicher Abschnitt über die Anwendung der komplexen Zahlen bei der Beschreibung von **RCL-Filterschaltungen**.

Zunächst behandeln wir die Grundlagen der komplexen Zahlen innerhalb der Mathematik und beginnen mit einer mathematischen Problemstellung: Wie wir im Abschnitt 4.2 über Polynome bereits festgestellt haben, besitzt jedes Polynom vom Grade n in $\mathbb{R}$ höchstens n verschiedene Nullstellen. Aber schon beim quadratischen Polynom $p(x) = x^2 + 1$ zeigt sich, dass dieses Polynom in $\mathbb{R}$ keine Nullstellen besitzt. Löst man die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ formal nach x auf, so erhält man

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{-1} \quad \notin \mathbb{R}.$$

Es hat sich als außerordentlich erfolgreich erwiesen, den Zahlenbereich der reellen Zahlen zu erweitern, indem man $\sqrt{-1}$ als eine neue Einheit einführt:

$$\boxed{i := \sqrt{-1}} \qquad \textbf{(imaginäre Einheit).}$$

Die Bezeichnung imaginäre Einheit rührt daher, dass sich die Wurzel jeder negativen reellen Zahl als reelles Vielfache dieser Einheit darstellen lässt:

$$\sqrt{-5} = \sqrt{-1 \cdot 5} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5}\, i.$$

Alle reellen Vielfachen von i nennt man die *imaginären Zahlen*. Die Kombination von reellen und imaginären Zahlen liefern die komplexen Zahlen:

Definition: *Ausdrücke der Form*

$$\boxed{c := a + i\,b} \qquad \textit{mit} \;\; a, b \in \mathbb{R}$$

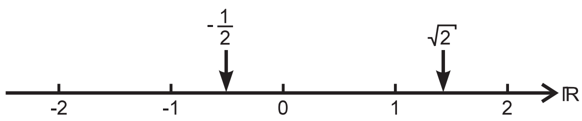
nennt man **komplexe Zahlen** *und* $\mathbb{C} := \{c = a + i\,b;\, a, b \in \mathbb{R}\}$ *die* **Menge der komplexen Zahlen.**

Für $b = 0$ ist die Zahl $c = a + 0\,i = a \in \mathbb{R}$. Die reellen Zahlen sind also in den komplexen enthalten. Die mathematische Bedeutung der komplexen Zahlen liegt darin, dass jedes Polynom vom Grade n genau n Nullstellen besitzt (→ *5.2.7 Fundamentalsatz der Algebra*).

5.1

5.1 Darstellung komplexer Zahlen

Jede **reelle** Zahl entspricht einem Punkt auf der Zahlengeraden:



Durch die Definition der komplexen Zahlen als "Paare" $c = a + i\,b$ hat eine **komplexe** Zahl zwei "Komponenten": eine rein reelle Komponente a und eine imaginäre Komponente $i\,b$. Zur Darstellung von komplexen Zahlen geht man also in die Zahlenebene über.

5.1.1 Algebraische Normalform

Komplexe Zahlen

$$c := a + i\,b \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

lassen sich mit Hilfe von **zwei** Zahlengeraden veranschaulichen (Abb. 5.1): Wählt man ein Koordinatensystem mit Abszisse a (Vielfaches der Einheit 1) und Ordinate $i\,b$ (Vielfaches der Einheit i), so ist jede komplexe Zahl ein Punkt dieser Ebene, der sog. *Gaußschen Zahlenebene*.

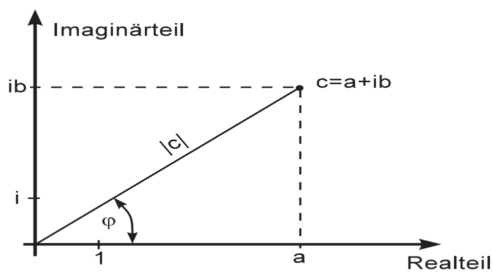


Abb. 5.1. Darstellung der komplexen Zahl $c = a + i\,b$.

Man nennt

$a = \mathrm{Re}\,(c)$ den Realteil von c
$b = \mathrm{Im}\,(c)$ den Imaginärteil von c.

⚠ **Achtung:** Sowohl der Real- als auch der Imaginärteil einer komplexen Zahl sind reelle Zahlen. Man beachte daher: Der Imaginärteil einer komplexen Zahl $c = a + i\,b$ ist **nicht** $i\,b$, sondern nur die reelle Größe $\mathrm{Im}\,(c) = b$!

Man bezeichnet die Darstellung der komplexen Zahl

$$\boxed{c = a + i\,b} \qquad \textbf{(Algebraische Normalform)}$$

durch Realteil und Imaginärteil als algebraische Normalform. Als den **Betrag** einer komplexen Zahl definieren wir den Abstand zum Nullpunkt

$$\boxed{|c| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\mathrm{Re}\,(c))^2 + (\mathrm{Im}\,(c))^2}} \qquad (\textbf{Betrag} \text{ von } c\,).$$

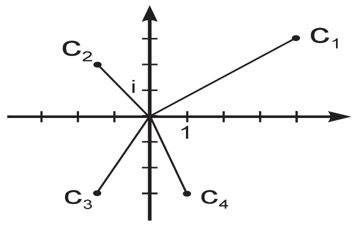
Beispiele 5.1:

① $c_1 = 4 + 3\,i \quad \hookrightarrow \quad |c_1| = 5.$

② $c_2 = -\sqrt{2} + 2\,i \quad \hookrightarrow \quad |c_2| = \sqrt{6}.$

③ $c_3 = -\frac{3}{2} - 3\,i \quad \hookrightarrow \quad |c_3| = \sqrt{\frac{45}{4}}.$

④ $c_4 = 1 - 3\,i \quad \hookrightarrow \quad |c_4| = \sqrt{10}.$



Bemerkungen:

(1) Zwei komplexe Zahlen $c_1 = a_1 + i\,b_1$ und $c_2 = a_2 + i\,b_2$ sind genau dann gleich, wenn $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$. Realteil und Imaginärteil sind also zwei eindeutig bestimmte Kenngrößen einer komplexen Zahl.

(2) Eine komplexe Zahl ist also nichts anderes als ein Punkt in der komplexen Zahlenebene.

(3) Es ist üblich, den vom Ursprung O zum Punkte c weisenden *Zeiger* (Ortsvektor) ebenfalls mit c zu bezeichnen.

5.1.2 Trigonometrische Normalform

Führt man den Winkel φ zwischen dem komplexen Zeiger c und der positiven $\mathbb{R}$-Achse ein, so gilt nach Abb. 5.1

$$\cos\varphi = \frac{a}{|c|} \qquad \text{und} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{|c|}.$$

Ersetzt man in der algebraischen Normalform $a = |c|\cos\varphi$ und $b = |c|\sin\varphi$, gilt für die komplexe Zahl

$$c = a + i\,b = |c| \cos\varphi + i\;|c| \sin\varphi$$

$$\boxed{c = |c|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \qquad (\textbf{Trigonometrische Normalform}).$$

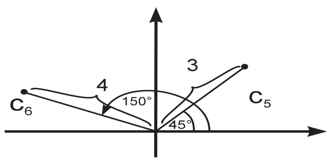
Man nennt diese Darstellung die *trigonometrische Normalform*, mit
- $|c|$ dem *Betrag* der komplexen Zahl c und
- φ dem *Winkelargument* (Winkel, Argument, Phase) von c.

Für $c = 0$ ist φ nicht erklärt! Die Phase einer komplexen Zahl ist nicht eindeutig, denn bei jeder vollen Umdrehung wird die Phase um 2π bzw. um 360° verändert.

Beispiele 5.2:

① $c_5 = 3\,(\cos 45° + i\sin 45°)\,.$

② $c_6 = 4\,(\cos 150° + i\sin 150°)\,.$



5.1.3 Exponentielle Normalform

Ersetzen wir in der trigonometrischen Normalform $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ durch die von Euler (1707-1783) eingeführten Abkürzung

$$\boxed{e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi} \qquad (\textbf{Eulersche Formel}),$$

dann lässt sich jede komplexe Zahl schreiben als

$$\boxed{c = |c|\,e^{i\varphi}} \qquad (\textbf{Exponentialform}).$$

Zunächst sehen wir die Eulersche Formel nur als Abkürzung an. Per Konvention wird das Argument φ bei der Exponentialform **immer** im Bogenmaß angegeben.

Beispiele 5.3:

① Exponentielle Normalform von c_5: $\varphi = 45° \hat{=} \frac{\pi}{4} \quad \hookrightarrow c_5 = 3\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

② Exponentielle Normalform von c_6: $\varphi = 150° \hat{=} \frac{5}{6}\pi \quad \hookrightarrow c_6 = 4\,e^{i\frac{5}{6}\pi}$.

③ Exponentielle Normalform von speziellen komplexen Zahlen:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i\,; \quad e^{i\pi} = -1\,; \quad e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i\,; \quad e^{2\pi\,i} = 1.$$ □

5.1.4 Umformungen der Normalformen

Im Folgenden geben wir die Rechenschritte zur Umformung von den einzelnen Normalformen an. Bei den komplexen Rechenoperationen wählen wir dann eine geeignete Normalform aus.

Exponentialdarstellung $\rightleftharpoons$ Trigonometrische Normalform:

Ist eine komplexe Zahl c in der Exponentialform $c = |c|\, e^{i\varphi}$ gegeben, so folgt mit der Eulerschen Formel direkt die trigonometrische Normalform

$$c = |c|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

Ist die komplexe Zahl $c = |c|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in der trigonometrischen Normalform gegeben, so folgt mit der Eulerschen Formel $c = |c|\, e^{i\varphi}$. Gegebenenfalls muss φ vom Grad- ins Bogenmaß umgerechnet werden.

Beispiele 5.4:

① $c_7 = 5\, e^{i\frac{3}{4}\pi} \quad \hookrightarrow \varphi = \frac{3}{4}\pi \widehat{=} 135°. \quad \Rightarrow \quad c_7 = 5\,(\cos 135° + i\sin 135°)\,.$

② $c_8 = \sqrt{2}\,(\cos 60° + i\sin 60°) \quad \hookrightarrow \varphi = 60° \widehat{=} \frac{\pi}{3}. \quad \Rightarrow \quad c_8 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}.$ □

Trigonometrische Normalform $\rightleftharpoons$ Algebraische Normalform:

Ist die komplexe Zahl $c = |c|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in der trigonometrischen Normalform gegeben, folgt durch Ausmultiplizieren und Auswerten der trigonometrischen Funktionen die algebraische Normalform:

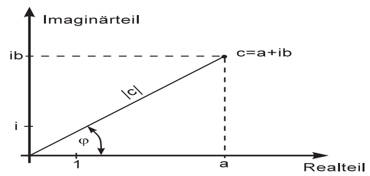
$$c = |c|\cos\varphi + i\;|c|\sin\varphi$$

mit dem Realteil $|c|\cos\varphi$ und dem Imaginärteil $|c|\sin\varphi$.

Ist die komplexe Zahl in der algebraischen Normalform $c = a + i\,b$ gegeben, folgt die trigonometrische Normalform, indem der Betrag $|c|$ und der Winkel φ bestimmt werden:

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi.$$



⚠ **Achtung:** Bei der Berechnung des Winkels $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ durch die Umkehrfunktion *arctan* ist zu beachten, dass der Winkel nur im Bereich $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ angegeben wird (siehe Kap. 4.7). Der Winkel φ muss dann anhand einer Skizze im Bereich $[0, 2\pi]$ spezifiziert werden.

Beispiele 5.5:

① $c_9 = 5\,(\cos 135° + i \sin 135°) = 5\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + i\,5\frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{5}{2}\sqrt{2} + i\,\frac{5}{2}\sqrt{2}.$

② $c_{10} = 4\sqrt{2} + i\,4\sqrt{2}.$

$\hookrightarrow |c_{10}| = \sqrt{16\cdot 2 + 16 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8,$

$\&\ \tan\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 1 \quad \hookrightarrow \varphi = 45° \hat{=} \frac{\pi}{4}.$

$\Rightarrow \quad c_{10} = 8\,(\cos 45° + i \sin 45°) = 8\,e^{i\frac{\pi}{4}}.$

③ $c_{11} = -4\sqrt{2} - i\,4\sqrt{2}.$

$\hookrightarrow |c_{11}| = \sqrt{16\cdot 2 + 16 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8,$

$\&\ \tan\varphi = \frac{-4\sqrt{2}}{-4\sqrt{2}} = 1 \quad \hookrightarrow \varphi = 45° + 180° = 225° \hat{=} \frac{5}{4}\pi.$

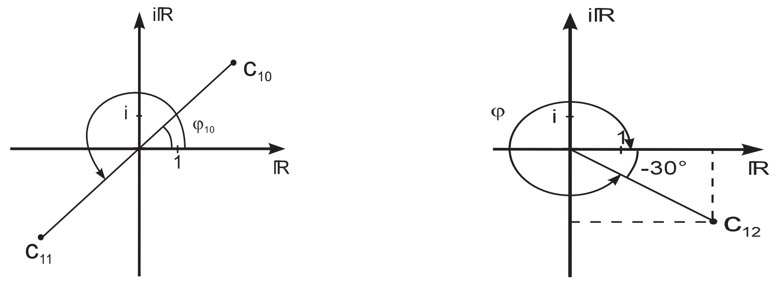
$\Rightarrow \quad c_{11} = 8\,(\cos 225° + i \sin 225°) = 8\,e^{i\frac{5}{4}\pi}.$

④ $c_{12} = \sqrt{3} - i.$

$\hookrightarrow |c_{12}| = \sqrt{3+1} = 2,$

$\&\ \tan\varphi = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3} \quad \hookrightarrow \varphi = -30° = 330° \hat{=} \frac{11}{6}\pi.$

$\Rightarrow \quad c_{12} = 2\,(\cos 330° + i \sin 330°) = 2\,e^{i\frac{11}{6}\pi}.$ □



Die komplex konjugierte Zahl

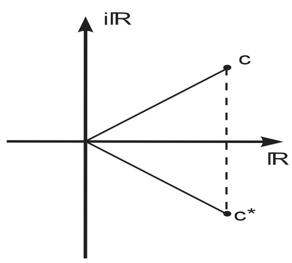


Abb. 5.2. c und c*

Um die Division von zwei komplexen Zahlen zu bestimmen, benötigen wir noch einen neuen Begriff. Wir führen hierfür zu der komplexen Zahl c die **komplex konjugierte Zahl** c^* (bzw. $\bar{c}$) ein, die aus c durch Spiegelung an der reellen Achse hervorgeht:

> **Definition:**
>
> *$c^* := a - i\,b$ heißt die zu $c = a + i\,b$* **komplex konjugierte Zahl.**

Aufgrund der Definition der komplex konjugierten Zahl folgt

$$\boxed{\begin{array}{lll} c = a + i\,b & \Rightarrow & c^* = a - i\,b. \\ c = |c|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) & \Rightarrow & c^* = |c|\,(\cos\varphi - i\sin\varphi)\,. \\ c = |c|\,e^{i\varphi} & \Rightarrow & c^* = |c|\,e^{-i\varphi}. \end{array}}$$

Tipp: Man erhält also die zu c komplex konjugierte Zahl sehr einfach, indem man formal i durch $-i$ ersetzt. Es gilt damit natürlich $(c^*)^* = c$.

Zusammenfassung:

Die **imaginäre Einheit** $\boxed{i := \sqrt{-1}}$ ist definiert durch die Eigenschaft $i^2 = -1$.

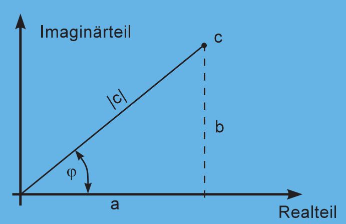
Für komplexe Zahlen gibt es 3 Normalformen:

(1) $c = a + i\,b$ **algebraische Normalform**
mit $a = \mathrm{Re}\,(c)$ (Realteil) und $b = \mathrm{Im}\,(c)$ (Imaginärteil).

(2) $c = |c| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ **trigonometrische Normalform**
mit $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Betrag) und $\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$ (Winkel).

(3) $c = |c|\,e^{i\varphi}$ **Exponentialform**
φ wird hierbei im Bogenmaß angegeben.

Komplexe Zahlen lassen sich in der **Gaußschen Zahlenebene** graphisch darstellen.



Die zu c komplex konjugierte Zahl c^* lautet

$$c^* = a - i\,b = |c|\,(\cos\varphi - i\sin\varphi) = |c|\,e^{-i\varphi}.$$

5.2

5.2 Komplexe Rechenoperationen

Was unter Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier komplexer Zahlen zu verstehen ist, wird nicht durch die Konstruktion der komplexen Zahlen festgelegt. Man muss diese Verknüpfungen neu definieren; aber natürlich so, dass für den Spezialfall Imaginärteil gleich Null die bereits festgelegten Verknüpfungen in $\mathbb{R}$ herauskommen.

Seien im Folgenden $c_1 = a_1 + i\, b_1$ und $c_2 = a_2 + i\, b_2$ zwei beliebige komplexe Zahlen. Dann definiert man:

5.2.1 Addition

$$\boxed{c_1 + c_2 := (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)}$$

Die Addition zweier komplexer Zahlen bedeutet die Addition der Realteile und die Addition der Imaginärteile. Die Addition wird in der algebraischen Normalform durchgeführt.

Beispiele 5.6:

① $c_1 = 9 - 2\,i$, $c_2 = 4 + i$.
$c_1 + c_2 = (9 + 4) + i\,(-2 + 1) = 13 - i$.

② $c_1 = 3(\cos 30° + i \sin 30°)$, $c_2 = 4 + i$. Um c_1 und c_2 zu addieren, muss die Zahl c_1 erst in die algebraische Normalform umgeformt werden:
$c_1 = 3 \cos 30° + i\, 3 \sin 30° = 2,598 + 1,5\, i$.
$\Rightarrow c_1 + c_2 = (2,598 + 1,5\, i) + (4 + i) = 6,598 + 2,5\, i$. □

5.2.2 Subtraktion

$$\boxed{c_1 - c_2 := (a_1 - a_2) + i\,(b_1 - b_2)}$$

Die Subtraktion zweier komplexer Zahlen bedeutet die Subtraktion der Realteile und die Subtraktion der Imaginärteile. Die Subtraktion wird in der algebraischen Normalform durchgeführt.

Beispiele 5.7:

① $c_1 = 9 - 2\,i$, $c_2 = 4 + i$.
$c_1 - c_2 = (9 - 2\,i) - (4 + i) = 9 - 4 + i\,(-2 - 1) = 5 - 3\,i$.

② $c_1 = 2\,e^{\frac{\pi}{4}i}$, $c_2 = 4 - 2\,i$. Um c_1 und c_2 voneinander zu subtrahieren, wird c_1 erst in die algebraische Normalform umgeformt:

$$\varphi = \tfrac{\pi}{4} \hat{=} 45° \hookrightarrow c_1 = 2\,e^{\frac{\pi}{4}i} = 2\,(\cos 45° + i \sin 45°)$$
$$= 2\,\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\,2\,\frac{1}{2}\sqrt{2} = 1,414 + i\,1,414.$$
$$\Rightarrow c_1 - c_2 = (1,414 + i\,1,414) - (4 - 2\,i) = -2,586 + 3,414\,i. \qquad \square$$

Geometrische Interpretation. Da die Addition und Subtraktion zweier komplexer Zahlen analog den entsprechenden Regeln der Vektorrechnung erfolgen (nämlich komponentenweise), entspricht die graphische Darstellung der Rechenoperationen dem Kräfteparallelogramm, also der Vektoraddition bzw. -subtraktion.

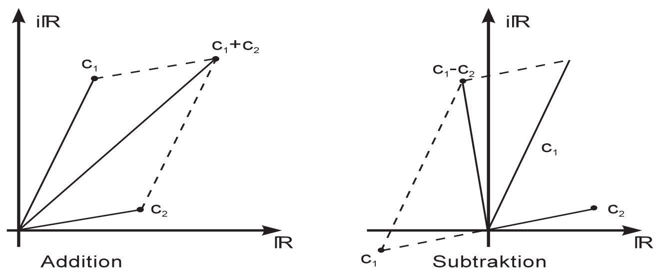


Abb. 5.3. Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen

Bemerkung: Obwohl eine komplexe Zahl nur einen Punkt in der komplexen Zahlenebene darstellt, wird wegen obiger Interpretation der "Vektoraddition" eine komplexe Zahl oftmals mit dem *Zeiger (Ortsvektor)* identifiziert.

5.2.3 Multiplikation

$$\boxed{c_1 \cdot c_2 := (a_1\,a_2 - b_1\,b_2) + i\,(a_1\,b_2 + b_1\,a_2)}$$

Diese Formel für die Multiplikation ergibt sich, wenn $(a_1 + i\,b_1) \cdot (a_2 + i\,b_2)$ nach dem Distributivgesetz für reelle Zahlen gliedweise ausmultipliziert und die Definition von $i^2 = -1$ ausgenutzt wird:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot c_2 &= (a_1 + i\,b_1) \cdot (a_2 + i\,b_2) \\ &= (a_1\,a_2 + a_1\,i\,b_2 + i\,b_1\,a_2 + i\,b_1\,i\,b_2) \\ &= a_1\,a_2 + i^2\,b_1\,b_2 + i\,a_1\,b_2 + i\,b_1\,a_2 \\ &= (a_1\,a_2 - b_1\,b_2) + i\,(a_1\,b_2 + b_1\,a_2)\,. \end{aligned}$$

Beispiele 5.8:

① $c_1 = 9 - 2\,i$, $c_2 = 4 + i$.

$$c_1 \cdot c_2 = (9 - 2\,i)\;(4 + i) = (36 + 2) + i\;(9 - 8) = 38 + i.$$

② Für das Produkt von $c = a + i\,b$ mit der komplex konjugierten Zahl $c^* = a - i\,b$ gilt

$$c \cdot c^* = (a + i\,b)\;(a - ib) = a^2 + b^2 = |c|^2\,.$$

Damit erhält man folgende wichtige Formel für $|c|$:

$$\boxed{|c| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c \cdot c^*}}$$ □

Geometrische Interpretation: Zur geometrischen Interpretation führen wir die Multiplikation nochmals aus, jetzt allerdings gehen wir von der trigonometrischen Normalform von

$$c_1 = |c_1|\,(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \quad \text{und} \quad c_2 = |c_2|\,(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$

aus. Gliedweises ausmultiplizieren liefert

$$c_1 \cdot c_2 = |c_1|\,(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \cdot |c_2|\,(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$

$$= |c_1|\,|c_2|\,\{[\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2] + i\;[\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2]\}.$$

Wenden wir nun die Additionstheoreme für $\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$ und $\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$ aus Kapitel 4.6.4 an:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos\varphi_1\,\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2 \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) &= \sin\varphi_1\,\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\,\sin\varphi_2, \end{aligned}$$

so erhalten wir als Produkt

$$\boxed{c_1 \cdot c_2 = |c_1| \cdot |c_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))\,.}$$

Tipp: Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen bedeutet die **Multiplikation der Beträge** und die **Addition der Winkel**. Dadurch kann der Punkt $c_1 \cdot c_2$ leicht in der Gaußschen Zahlenebene konstruiert werden.

Für die Darstellung in der Exponentialform folgt

$$\boxed{c_1 \cdot c_2 = |c_1|\;e^{i\varphi_1} \cdot |c_2|\,e^{i\varphi_2} = |c_1|\,|c_2|\,e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.}$$

Dies entspricht genau der Eigenschaft der reellen Exponentialfunktion:

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}.$$

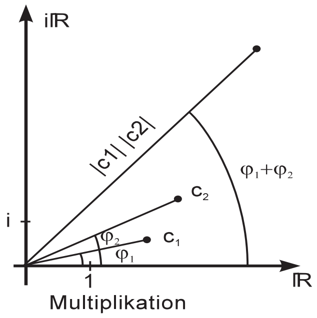


Abb. 5.4. Multiplikation zweier komplexer Zahlen

5.2.4 Division

$$\frac{c_1}{c_2} := \frac{a_1\,a_2 + b_1\,b_2}{(a_2)^2 + (b_2)^2} + i\,\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2)^2 + (b_2)^2} \qquad \text{für} \quad c_2 \neq 0$$

Diese Formel für die Division ergibt sich, wenn man formal $\frac{c_1}{c_2}$ mit c_2^* erweitert und Zähler bzw. Nenner ausmultipliziert:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{c_2^*}{c_2^*} = \frac{a_1 + i\,b_1}{a_2 + i\,b_2} \cdot \frac{a_2 - i\,b_2}{a_2 - i\,b_2} = \frac{(a_1 + i\,b_1)\,(a_2 - i\,b_2)}{(a_2 + i\,b_2)\,(a_2 - i\,b_2)}$$

$$= \frac{(a_1\,a_2 + b_1\,b_2) + i\;(b_1\,a_2 - a_1\,b_2)}{(a_2)^2 + (b_2)^2}.$$

⚠ Auch in $\mathbb{C}$ ist die Division durch $0 = 0 + i\,0$ **nicht** erlaubt!

Geometrische Interpretation: Führt man die Division in der trigonometrischen Normalform durch, so erhält man unter Verwendung der trigonometrischen Formeln für $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ und $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$ analog dem Vorgehen unter Abschnitt 5.2.3

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{|c_1|\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|c_2|\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{|c_1|}{|c_2|}\,(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

sowie

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{|c_1|\,e^{i\varphi_1}}{|c_2|\,e^{i\varphi_2}} = \frac{|c_1|}{|c_2|}\,e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Tipp: Bei der Quotientenbildung zweier komplexer Zahlen werden die **Beträge dividiert** und die **Winkel subtrahiert**. Damit ist $\frac{c_1}{c_2}$ ebenfalls in der Gaußschen Zahlenebene geometrisch zu konstruieren.

Beispiele 5.9:

① $c_1 = 9 - 2\,i$, $c_2 = 4 + i$.
Um $\frac{c_1}{c_2}$ zu berechnen, erweitern wir den Quotienten mit c_2^* und multiplizieren Zähler und Nenner aus:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{9 - 2\,i}{4 + i} \cdot \frac{4 - i}{4 - i} = \frac{(9 \cdot 4 - 2 \cdot 1) + i\,(-2 \cdot 4 - 9 \cdot 1)}{17} = 2 - i.$$

② $c_1 = 8\,e^{i\frac{4}{3}\pi}$, $c_2 = 4\,(\cos 60° + i \sin 60°)$.
Um $\frac{c_1}{c_2}$ zu berechnen, stellen wir c_2 in der Exponentialform dar. Da $60° \hat{=} \frac{\pi}{3}$ gilt

$$c_2 = 4\,(\cos 60° + i \sin 60°) = 4\,e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Damit folgt

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{8\,e^{i\frac{4}{3}\pi}}{4\,e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2\,e^{i\left(\frac{4}{3}\pi - \frac{\pi}{3}\right)} = 2\,e^{i\pi} = -2.$$ □

Beispiel 5.10. Gegeben seien $c_1 = 1 + i\sqrt{3}$ und $c_2 = -\sqrt{3} + 3\,i$. Man berechne (i) $c_1 \cdot c_2$ und (ii) $\frac{c_1}{c_2}$. (iii) Man bestimme die exponentielle Normalform der Zahlen und führe nochmals die (iv) Multiplikation bzw. (v) die Division durch.

(i) $c_1 \cdot c_2 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3} + 3\,i\right) = \left(-\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\right) + i\,(3 - 3) = -4\sqrt{3}.$

(ii) $\dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} + 3\,i} \cdot \dfrac{-\sqrt{3} - 3\,i}{-\sqrt{3} - 3\,i} = \dfrac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3\,i - 3\,i}{3 + 9} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} - \dfrac{1}{2}\,i.$

(iii) Darstellung von c_1 und c_2 in exponentieller Normalform

$$|c_1| = \sqrt{1 + 3} = 2;\ \tan\varphi = \tfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60° \hat{=} \tfrac{\pi}{3} \Rightarrow c_1 = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$$|c_2| = 2\sqrt{3};\ \tan\varphi = -\tfrac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \pi - \tfrac{\pi}{3} = \tfrac{2}{3}\pi \Rightarrow c_2 = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{2}{3}\pi}.$$

(iv) $c_1 \cdot c_2 = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{2}{3}\pi} = 4\sqrt{3}\,e^{i\pi} = -4\sqrt{3}.$

(v) $\dfrac{c_1}{c_2} = \frac{2}{2\sqrt{3}}\,e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{3}}.$ □

Zusammenfassung:
Addition, Subtraktion und Multiplikation werden formal wie bei reellen Zahlen ausgeführt, wobei $i^2 = -1$ zu ersetzen ist.

Die Division $\frac{c_1}{c_2}$ wird durch Erweiterung mit c_2^* berechnet. Die Ergebnisse werden in die Form $a + i\,b \quad (a, b \in \mathbb{R})$ gebracht.

Multiplikation und Division lassen sich in der trigonometrischen bzw. exponentiellen Normalform sehr einfach ausführen: Bei der Multiplikation werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert, während bei der Division die Beträge dividiert und die Winkel subtrahiert werden.

5.2.5 Potenzen

Die Potenz c^n $(n \in \mathbb{N})$ einer komplexen Zahl gestaltet sich in der trigonometrischen bzw. exponentiellen Normalform als besonders einfach. Gehen wir von der komplexen Zahl c in der exponentiellen Normalform aus: $c = |c|\, e^{i\varphi}$. Dann gilt

$$c^2 = c \cdot c = |c|\, e^{i\varphi}\, |\cdot c|\, e^{i\varphi} = |c|^2\, e^{i\,2\,\varphi}$$

$$c^3 = c^2 \cdot c = |c|^2\, e^{i\,2\,\varphi} \cdot |c|\, e^{i\varphi} = |c|^3\, e^{i\,3\,\varphi}$$

$$usw.$$

Durch vollständige Induktion weist man direkt nach, dass gilt

$$\boxed{c = |c|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad \Rightarrow \qquad c^n = |c|^n\,(\cos(n\,\varphi) + i\sin(n\,\varphi))}$$

bzw.

$$\boxed{c = |c|\, e^{i\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad c^n = |c|^n\, e^{i\,n\,\varphi}.}$$

Diese sog. *Moivresche Formel* besagen, dass man c^n dadurch erhält, indem der Betrag potenziert und der Winkel mit n multipliziert wird.

Beispiele 5.11:

① Gesucht ist $\left(2\sqrt{2} + i\,2\sqrt{2}\right)^5$.
Um die komplexe Zahl $c = 2\sqrt{2} + i\,2\sqrt{2}$ mit 5 zu potenzieren, müssen wir sie zuerst in der exponentiellen Normalform darstellen:

$$\left.\begin{array}{l} |c| = \sqrt{4 \cdot 2 + 4 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4 \\ \tan\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1 \hookrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow c = 4\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Anschließend können wir die Potenzformel verwenden: Der Betrag wird mit 5 potenziert und der Winkel mit 5 multipliziert:

$$\Rightarrow c^{\mathbf{5}} = 4^{\mathbf{5}}\, e^{i\frac{\pi}{4}\cdot\mathbf{5}} = 1024\, e^{i\frac{5}{4}\pi}.$$

② Gesucht ist $\left(\sqrt{3} - i\right)^6$.
Nach Beispiel 5.5 ④ ist $c = \sqrt{3} - i = 2\, e^{i\frac{11}{6}\pi}$.
Entsprechend der Potenzformel erhält man

$$c^{\mathbf{6}} = \left(2\, e^{i\frac{11}{6}\pi}\right)^{\mathbf{6}} = 2^{\mathbf{6}}\, e^{i\frac{11}{6}\pi\cdot\mathbf{6}} = 64\, e^{i\,11\pi} = -64. \qquad \square$$

5.2.6 Wurzeln

Für $c = |c|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |c|\,e^{i\varphi}$ ist die **n-te Wurzel** ($n \in \mathbb{N}$) gegeben durch

$$\begin{aligned} c^{\frac{1}{n}} &= \Big\{ \sqrt[n]{|c|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + k\cdot 360°}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + k\cdot 360°}{n}\right)\right); \\ &\qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\Big\} \\ &= \{\sqrt[n]{|c|}\,e^{i\frac{\varphi+k\cdot 2\pi}{n}};\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\}, \qquad (*) \end{aligned}$$

wenn $\sqrt[n]{|c|}$ die **reelle** n-te Wurzel von $|c| \geq 0$.

Begründung: Um zu zeigen, dass die komplexen Zahlen

$$W_k := \sqrt[n]{|c|}\,e^{i\frac{\varphi+k\,2\pi}{n}};\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

n-te Wurzel von c sind, genügt es zu zeigen, dass $(W_k)^n = c$. Denn die n-te Wurzel einer komplexen Zahl hat die universelle Eigenschaft, dass sie zur n-ten Potenz genommen genau c ergeben muss! Dies ist aber aufgrund der Rechenregeln für das Potenzieren offensichtlich:

$$(W_k)^n = \left(\sqrt[n]{|c|}\right)^n e^{i\frac{\varphi+k\,2\pi}{n}\cdot n} = |c|\,e^{i(\varphi+k\,2\pi)} = |c|\,e^{i\varphi},$$

wenn man beachtet, dass $e^{i(\varphi+k\,2\pi)} = e^{i\varphi}$ für $k \in \mathbb{N}$ ist. □

Die n-ten Wurzeln W_k sind für $k = 0, \ldots, n-1$ voneinander verschieden, wiederholen sich aber für $k \geq n$. Man beachte also, dass die n-te Potenz einer komplexen Zahl **eindeutig**, die n-ten Wurzeln aber **mehrdeutig** sind.

Beispiele 5.12:

① $$\left(4\sqrt{2} + i\,4\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(8\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \{\sqrt[3]{8}\,e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi}{3}};\ k = 0, 1, 2\} = \{2\,e^{i\frac{\pi}{12}},\ 2\,e^{i\frac{9}{12}\pi},\ 2\,e^{i\frac{17}{12}\pi}\}.$$

② $$(-1)^{\frac{1}{5}} = \left(1\,e^{i\pi}\right)^{\frac{1}{5}} = \{\sqrt[5]{1}\,e^{i\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{5}};\ k = 0, 1, 2, 3, 4\} = \{e^{i\frac{\pi}{5}},\ e^{i\frac{3}{5}\pi},\ e^{i\pi},\ e^{i\frac{7}{5}\pi},\ e^{i\frac{9}{5}\pi}\}.$$ □

Sonderfall: Die n-ten Wurzeln aus 1: Jede komplexe Lösung von $z^n = 1$ heißt n-te *Einheitswurzel*. Mit Formel $(*)$ folgt für $c = 1$:

$$1^{\frac{1}{n}} = \left(1\,e^{i0}\right)^{\frac{1}{n}} = \{1,\ e^{i\frac{2\pi}{n}},\ e^{i\frac{4\pi}{n}}, \ldots,\ e^{i\frac{2\pi\,(n-1)}{n}}\}.$$

Der Betrag dieser Zahlen ist jeweils 1, d.h. die n-ten Einheitswurzeln liegen auf dem Einheitskreis. Die Differenz der Winkel ist jeweils $\frac{2\pi}{n}$, so dass sie nacheinander durch Drehung um $\frac{2\pi}{n}$ aus der 1 hervorgehen.

Beispiel 5.13. Gesucht sind alle 9.-ten Einheitswurzeln:

$$\begin{aligned}(1)^{\frac{1}{9}} &= \left(1\,e^{i0}\right)^{\frac{1}{9}} = \{\sqrt[9]{1}\,e^{i\,\frac{0+k\,2\pi}{9}}\,;\,k=0,\ldots,8\}\\ &= \{1\,e^{0}\,,\,e^{i\,\frac{2\pi}{9}}\,,\,e^{i\,\frac{4\pi}{9}},\ldots,\,e^{i\,\frac{16}{9}\pi}\}.\end{aligned}$$

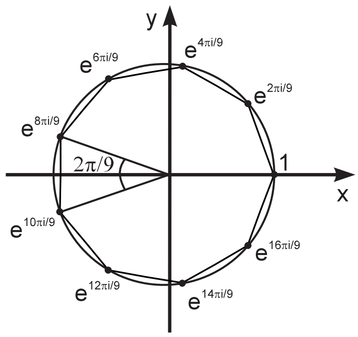


Abb. 5.5. 9.-te Einheitswurzel von $c = 1$

Satz: Für $n > 1$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\,\frac{\varphi+k\cdot 2\pi}{n}} = 0.$

Begründung: Dieser Satz ist aufgrund seiner geometrischen Eigenschaft offensichtlich, da $e^{i\,\frac{\varphi+k\cdot 2\pi}{n}}$ die n-te Einheitswurzel der komplexen Zahl $e^{i\varphi}$ darstellt. Summiert man alle n Einheitswurzeln auf (Vektoraddition), so ergibt die Summe Null; formal erhält man diese Aussage über die geometrische Reihe, denn

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\,\frac{\varphi+k\cdot 2\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\,\frac{\varphi}{n}}\,e^{i\,k\,\frac{2\pi}{n}} = e^{i\,\frac{\varphi}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\,\frac{2\pi}{n}}\right)^{k} = e^{i\,\frac{\varphi}{n}}\;\frac{1-\left(e^{i\,\frac{2\pi}{n}}\right)^{n}}{1-e^{i\,\frac{2\pi}{n}}} = 0,$$

da $1-\left(e^{i\,\frac{2\pi}{n}}\right)^{n} = 1-e^{i2\pi} = 1-1 = 0.$ □

Visualisierung mit Maple: Auf der Homepage befinden sich Worksheets, um komplexe Zahlen und die komplexen Rechenoperationen graphisch darzustellen bzw. in Form von Animationen zu visualisieren.

5.2.7 Fundamentalsatz der Algebra

Wir interpretieren die Mehrdeutigkeit der n-ten Wurzel folgendermaßen: Jedes Polynom n-ten Grades der Form $p(z) = z^n - a \quad (n \in \mathbb{N},\, a \in \mathbb{C})$ hat genau n Nullstellen, nämlich die n-ten Wurzeln von a. Diese Eigenschaft lässt sich auf beliebige komplexe Polynome vom Grade n verallgemeinern. Dies ist der Inhalt des *Fundamentalsatzes der Algebra*, der auf F. Gauß (1797) zurückgeht:

Satz: Jedes komplexe Polynom n-ten Grades

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

$$(a_k \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0,\ z \in \mathbb{C})$$

besitzt **genau** n Nullstellen.

Zusatz: Sind die Koeffizienten von $p(z)$ reell (d.h. $a_k \in \mathbb{R}$), so sind die Nullstellen reell oder sie treten paarweise komplex konjugiert auf.

Der Fundamentalsatz stellt zwar sicher, dass jedes Polynom n-ten Grades n Nullstellen besitzt, er sagt aber nichts darüber aus, wie diese Nullstellen zu finden sind. Es gibt auch im Komplexen außer in einfachen Spezialfällen keine allgemeine Formel, wie die Nullstellen berechnet werden können. Somit bleibt wie im Reellen: Entweder die Nullstellen zu erraten und durch Polynomdivision den Grad zu reduzieren oder sie numerisch zu bestimmen.

Beispiel 5.14. Gesucht sind die Nullstellen von

$$p(z) = z^3 - 2\,z - 4.$$

Der Fundamentalsatz besagt, dass es genau 3 Nullstellen gibt. Um eine Nullstelle zu erhalten, probieren wir $z = 0, \pm 1, \pm 2$: $\hookrightarrow z = 2$ ist eine Nullstelle. Durch Polynomdivision erhalten wir:

$$\begin{array}{cccccccc}
(z^3 & & -2z & -4) & : & (z-2) & = & z^2+2z+2. \\
z^3 & -2z^2 & & & & & & \\
\hline
& 2z^2 & -2z & & & & & \\
& 2z^2 & -4z & & & & & \\
\hline
& & 2z & -4 & & & & \\
& & 2z & -4 & & & & \\
\hline
& & & 0 & & & &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \left(z^3 - 2\,z - 4\right) = (z-2)\,\left(z^2 + 2\,z + 2\right).$$

Die quadratische Formel liefert $z_{2/3} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$.
Die Nullstellen des Polynoms sind also: $2\,,\ -1+i\,,\ -1-i$. □

Bemerkung: Der Zusatz zum Fundamentalsatz lässt sich direkt nachrechnen: Ist $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ ein reelles Polynom und z_0 eine Nullstelle von p, dann ist z_0^* ebenfalls eine Nullstelle von p:

$$\begin{aligned}
p(z_0^*) &= a_n\,(z_0^*)^n + a_{n-1}(z_0^*)^{n-1} + \ldots + a_1\,z_0^* + a_0 \\
&= a_n\,(z_0^n)^* + a_{n-1}\left(z_0^{n-1}\right)^* + \ldots + a_1\,(z_0)^* + a_0 \\
&= \left(a_n\,z_0^n + a_{n-1}\,z_0^{n-1} + \ldots + a_1\,z_0 + a_0\right)^* = (p\,(z_0))^* = 0^* = 0. \ \square
\end{aligned}$$

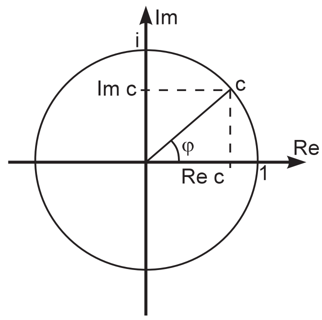
5.3 Anwendungen

5.3.1 Beschreibung harmonischer Schwingungen im Komplexen

Das aus der Mechanik bekannte Federpendel hat die Eigenschaft, dass bei einer ungedämpften Schwingung die Auslenkung aus der Ruhelage $s(t)$ den zeitlichen Verlauf $s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ besitzt. Das System schwingt mit der Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$, wenn D die Federkonstante und m die Masse ist. Diese Funktion besitzt eine zeitlich konstante Maximalamplitude A und die Nullphase φ. Die Schwingungsdauer beträgt $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Eine periodische Bewegung mit einer Frequenz ω und zeitlich konstanter Maximalamplitude A nennt man **harmonische Schwingung**. Das zum Federpendel elektrische Analogon ist der Spannungsverlauf $U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$ in einem LC-Wechselstromkreis mit der Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ bzw. der Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Zur Beschreibung von harmonischen Schwingungen im Komplexen betrachten wir zunächst die komplexe Zahl

$$\boxed{c = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.}$$



Da $|c| = 1$, ist c eine Zahl auf dem Einheitskreis. Projiziert man den Punkt c auf die reelle Achse, erhält man den Realteil von c: $\mathrm{Re}(c) = \cos\varphi$; projiziert man den Punkt c auf die imaginäre Achse, so erhält man den Imaginärteil von c: $\mathrm{Im}(c) = \sin\varphi$.

Variiert der Winkel φ als Funktion der Zeit $\varphi = \omega \cdot t$ $\quad(\omega = \frac{2\pi}{T}$ konstante Kreisfrequenz), durchläuft $\boxed{e^{i\varphi} = e^{i\omega t}}$ für $0 \leq t \leq T$ den Einheitskreis in der komplexen Ebene.

$\cos\omega t$ und $\sin\omega t$ sind die Projektionen des komplexen Zeigers $e^{i\omega t}$ auf die reelle bzw. auf die imaginäre Achse.

Visualisierung: Auf der Homepage befindet sich eine **Animation**, welche die Projektionen von $e^{i\omega t}$ auf die x- bzw. y-Achse darstellt. Der im Einheitskreis laufenden Zeiger $e^{i\omega t}$ wird zusammen mit seinem Real- und Imaginärteil animiert dargestellt, indem die Variable t von 0 bis $\frac{2\pi}{T}$ variiert (siehe auch Abb. 5.6).

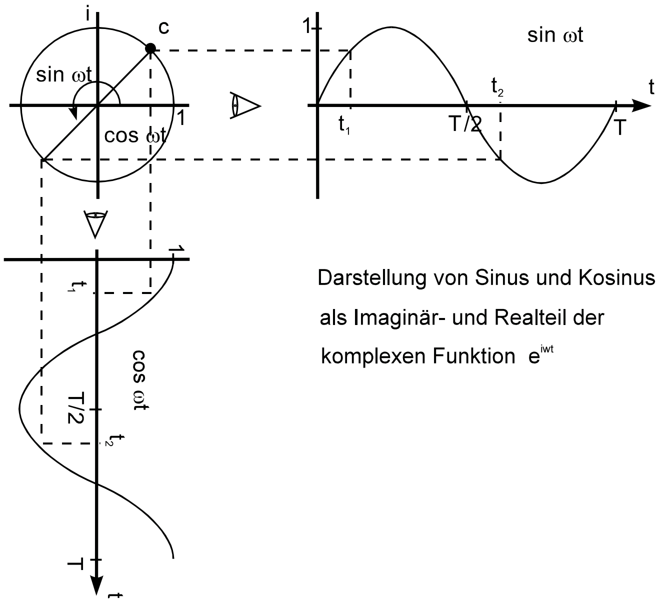


Abb. 5.6. Real- und Imaginärteil von $e^{i\,\omega\,t}$

Eine harmonische Schwingung mit Amplitude A und Nullphase φ_0 lässt sich somit darstellen in der Form

$$\begin{aligned} A\,\cos\left(\omega t+\varphi_0\right) &= \operatorname{Re}\left(A\,e^{i(\omega t+\varphi_0)}\right) &= \operatorname{Re}\left(A\,e^{i\varphi_0}\,e^{i\omega t}\right) \\ A\,\sin\left(\omega t+\varphi_0\right) &= \operatorname{Im}\left(A\,e^{i(\omega t+\varphi_0)}\right) &= \operatorname{Im}\left(A\,e^{i\varphi_0}\,e^{i\omega t}\right). \end{aligned}$$

Also ist die komplexe Beschreibung einer harmonischen Schwingung

$$\boxed{\hat{y}\,(t)=A\,e^{i\varphi_0}\,e^{i\omega t}}$$

mit der *komplexen Amplitude* $A\,e^{i\varphi_0}$ und dem reinen Zeitanteil $e^{i\omega t}$.

5.3.2 Superposition gleichfrequenter Schwingungen

Im Folgenden werden wir die Überlagerung (*Superposition*) zweier **gleichfrequenter** harmonischer Schwingungen im Komplexen berechnen. Dabei nutzen wir aus, dass die komplexe Amplitude sowohl die reelle Amplitude A als auch die Phase φ der Schwingung beinhaltet. Gegeben seien zwei Schwingungen

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_1\sin\left(\omega t+\varphi_1\right) \\ u_2\,(t) &= u_2\sin\left(\omega t+\varphi_2\right). \end{aligned}$$

Gesucht ist die Amplitude A und Phase φ der Überlagerung

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = A \sin(\omega t + \varphi) .$$

Zur Berechnung der Überlagerung interpretieren wir $u_1(t)$ als Imaginärteil der komplexen Schwingung $\hat{u}_1(t) = u_1\, e^{i(\omega t + \varphi_1)}$ und $u_2(t)$ als Imaginärteil von $\hat{u}_2(t) = u_2\, e^{i(\omega t + \varphi_2)}$ und führen die Überlagerung im Komplexen durch. Anschließend nehmen wir von dem Ergebnis die imaginäre Komponente; sie entspricht dann $u_1(t) + u_2(t)$:

$$\boxed{u_1(t) + u_2(t) = \operatorname{Im} \hat{u}_1(t) + \operatorname{Im} \hat{u}_2(t) = \operatorname{Im}(\hat{u}_1(t) + \hat{u}_2(t)) = \operatorname{Im} \hat{u}(t) = u(t) .}$$

$$\xrightarrow[\textbf{ins Komplexe}]{\textbf{Übergang}} \quad \begin{aligned} \hat{u}_1(t) &= u_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} = u_1 e^{i\varphi_1} e^{i\omega t}, \\ \hat{u}_2(t) &= u_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} = u_2 e^{i\varphi_2} e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[\textbf{Addition}]{\textbf{Komplexe}} \quad \begin{aligned} \hat{u}(t) &= \hat{u}_1(t) + \hat{u}_2(t) \\ &= u_1\, e^{i\varphi_1}\, e^{i\omega t} + u_2\, e^{i\varphi_2}\, e^{i\omega t} \\ &= \left(u_1\, e^{i\varphi_1} + u_2\, e^{i\varphi_2}\right)\, e^{i\omega t} \\ &= A\, e^{i\varphi}\, e^{i\omega t} = A\, e^{i(\omega t + \varphi)}. \end{aligned}$$

Die komplexe Amplitude der Überlagerung $A\, e^{i\varphi}$ ergibt sich aus der Summe der beiden Einzelamplituden $u_1\, e^{i\varphi_1}$ und $u_2\, e^{i\varphi_2}$. Die Superposition entspricht der vektoriellen Addition dieser komplexen Amplituden. Die komplexe Addition kann sowohl rechnerisch als auch zeichnerisch (siehe Abb. 5.7) durchgeführt werden.

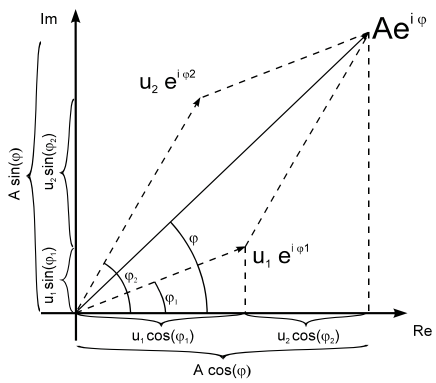


Abb. 5.7. Graphische Addition der komplexen Amplituden

Führt man die komplexe Addition formelmäßig durch, sind A und φ bestimmt durch

$$A\, e^{i\varphi} = u_1\, e^{i\varphi_1} + u_2\, e^{i\varphi_2}$$

$$= u_1\left(\cos(\varphi_1) + i\,\sin(\varphi_1)\right) + u_2\left(\cos(\varphi_2) + i\,\sin(\varphi_2)\right)$$
$$= \left(u_1\,\cos(\varphi_1) + u_2\,\cos(\varphi_2)\right) + i\left(u_1\,\sin(\varphi_1) + u_2\,\sin(\varphi_2)\right).$$

Damit ergibt sich $A = \sqrt{\mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2}$ und $\tan(\varphi) = \frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}$. Unter Verwendung des Additionstheorems für die Kosinusfunktion und $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ gilt

$$\begin{aligned} A^2 &= u_1^2\,\cos^2(\varphi_1) + u_2^2\,\cos^2(\varphi_2) + 2u_1u_2\,\cos(\varphi_1)\,\cos(\varphi_2) + \\ &\quad u_1^2\,\sin^2(\varphi_1) + u_2^2\,\sin^2(\varphi_2) + 2u_1u_2\,\sin(\varphi_1)\,\sin(\varphi_2) \\ &= u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2\,\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

und

$$\tan(\varphi) = \frac{u_1\,\sin(\varphi_1) + u_2\,\sin(\varphi_2)}{u_1\,\cos(\varphi_1) + u_2\,\cos(\varphi_2)}.$$

$$\xrightarrow[\textbf{ins Reelle}]{\textbf{Übergang}} \quad u(t) = u_1(t) + u_2(t) = \mathrm{Im}\left(A\,e^{i(\omega t+\varphi)}\right) = A\sin(\omega t + \varphi).$$

Zusammenfassung: Besitzen zwei harmonische Schwingungen $u_1(t) = u_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ und $u_2(t) = u_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ **dieselbe** Frequenz ω, dann ist die Superposition wieder eine harmonische Schwingung

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = A\sin(\omega t + \varphi).$$

mit Amplitude

$$\boxed{A = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2\,\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}}$$

und Phase

$$\boxed{\tan(\varphi) = \frac{u_1\,\sin(\varphi_1) + u_2\,\sin(\varphi_2)}{u_1\,\cos(\varphi_1) + u_2\,\cos(\varphi_2)}}.$$

Bemerkungen:

(1) Auf dieselbe Weise erhält man die Überlagerung zweier Kosinusschwingungen $u_1(t) = u_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$, $u_2(t) = u_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, indem diese Schwingungen als *Realteil* der entsprechenden komplexen Schwingungen interpretiert werden. $u(t) = \mathrm{Re}\left(A\,e^{i(\omega t+\varphi)}\right)$ liefert dann den Kosinusanteil der Superposition.

(2) Ist eine Schwingung in Kosinusdarstellung $u_1(t) = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ und die andere in der Sinusdarstellung $u_2(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ gegeben, so muss eine gemeinsame Darstellungsform gewählt werden. Entweder man schreibt

$$u_1(t) = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) = a_1 \sin\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

und führt die Überlagerung in der Sinusform durch oder man schreibt für

$$u_2(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = a_2 \cos\left(\omega t + \varphi_2 - \frac{\pi}{2}\right)$$

und führt die Überlagerung in der Kosinusform durch.

(3) ⚠ **Achtung:** Die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen **unterschiedlicher** Frequenzen führt i.A. nicht mehr zu einer periodischen Funktion. Nur im Fall, dass das Verhältnis der Frequenzen eine gebrochen-rationale Zahl ist, erhält man wieder eine periodische Funktion, aber auch dann keine harmonische mehr. Siehe auch das zugehörige Worksheet.

Beispiel 5.15 (Mit MAPLE-Worksheet). Gesucht ist die Überlagerung der beiden Wechselspannungen

$$u_1(t) = 4\sin(2\,t) \quad \text{und} \quad u_2(t) = 3\cos\left(2\,t - \frac{\pi}{6}\right).$$

Bevor man diese beiden harmonischen Funktionen überlagert, stellt man z.B. $u_2(t)$ als Sinusfunktion dar:

$$u_2(t) = 3\cos\left(2\,t - \frac{\pi}{6}\right) = 3\sin\left(2\,t - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\left(2\,t + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\xrightarrow[\text{ins Komplexe}]{\text{Übergang}} \quad \begin{aligned} \hat{u}_1(t) &= 4\,e^{i\,2\,t} \\ \hat{u}_2(t) &= 3\,e^{i\left(2\,t + \frac{\pi}{3}\right)} = 3\,e^{i\frac{\pi}{3}}\,e^{i\,2\,t}. \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[\text{Addition}]{\text{Komplexe}} \quad \begin{aligned} \hat{u}(t) &= \hat{u}_1(t) + \hat{u}_2(t) \\ &= 4\,e^{i\,2\,t} + 3\,e^{i\frac{\pi}{3}}\,e^{i\,2\,t} = \left(4 + 3\,e^{i\frac{\pi}{3}}\right)e^{i\,2\,t}. \end{aligned}$$

Addition der komplexen Amplituden
$c = 4+3\,e^{i\frac{\pi}{3}} = 4+3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4+3\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 5,5+i\,2,6.$

Darstellung von c in Exponentialform
$|c| = \sqrt{5,5^2 + 2,6^2} = 6,08\,,$
$\tan\varphi = \frac{\operatorname{Im} c}{\operatorname{Re} c} = \frac{2,6}{5,5} \quad \hookrightarrow \varphi = 25,28° \hat{=} 0.44\,.$
$\Rightarrow c = A\,e^{i\varphi}$ mit $A = 6,08 \quad \varphi = 0.44$

$\Rightarrow \hat{u}(t) = 6,08\,e^{i\,0.44}\,e^{i\,2\,t} = 6,08\,e^{i\,(2\,t+0.44)}.$

$$\xrightarrow[\text{ins Reelle}]{\text{Übergang}} \quad u(t) = \operatorname{Im}\hat{u}(t) = 6,08\;\sin(2\,t + 0.44)\,.$$

In Abb. 5.8 ist die Überlagerung der beiden Schwingungen graphisch dargestellt:

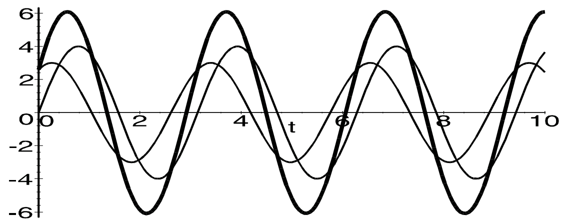


Abb. 5.8. Überlagerung zweier gleichfrequenter Schwingungen

Dieses Verfahren lässt sich leicht auf den Fall der Überlagerung von mehr als zwei harmonischen Schwingungen mit gleichen Frequenzen übertragen. □

5.3.3 Beschreibung von RCL-Gliedern bei Wechselströmen

Wir betrachten elektrische Netzwerke, die sich aus Ohmschen Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten zusammensetzen. In Wechselstromkreisen besitzen die Spannungen $U(t)$ und die Ströme $I(t)$ zeitlich einen sinus- oder kosinusförmigen Verlauf:

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad , \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_2)\,.$$

Wir gehen zu der komplexen Formulierung über und fassen sie als Realteile der komplexen Funktionen

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= U_0\, e^{i(\omega t+\varphi_1)} &= U_0\, e^{i\varphi_1}\, e^{i\omega t} &= \hat{U}_0\, e^{i\omega t} \\ \hat{I}(t) &= I_0\, e^{i(\omega t+\varphi_2)} &= I_0\, e^{i\varphi_2}\, e^{i\omega t} &= \hat{I}_0\, e^{i\omega t} \end{aligned}$$

auf. Im Folgenden zeigen wir, dass sich das Ohmsche Gesetz auf die induktiven und kapazitiven Schaltelemente überträgt, wenn man diese komplexe Formulierung wählt.

(1) Ohmscher Widerstand R. Für einen Ohmschen Widerstand ist der Zusammenhang zwischen Spannung und Strom gegeben durch $\boxed{U(t) = R\,I(t).}$ Dieses Gesetz gilt auch für einen komplexen Wechselstrom $\hat{I}(t) = \hat{I}_0\, e^{i\omega t}$.

$$\hookrightarrow \hat{U}(t) = R\,\hat{I}_0\, e^{i\omega t} = R\,\hat{I}(t)\,.$$

Ein *Ohmscher Widerstand* wird durch den reellen Widerstand R beschrieben. Strom und Spannung sind in Phase.

(2) Kapazität C. Bei einem Kondensator mit Kapazität C besteht folgender Zusammenhang zwischen Ladung Q und angelegter Spannung U:

$$\boxed{Q = C \cdot U} \quad \hookrightarrow \quad I(t) = \frac{d}{dt} Q(t) = C \cdot \dot{U}(t).$$

Speziell für $\hat{U}(t) = \hat{U}_0\, e^{i\omega t}$ folgt

$$\hat{I}(t) = C \cdot \left(\hat{U}_0\, e^{i\omega t}\right)' = C \cdot \hat{U}_0\, e^{i\omega t}\, i\omega = C \cdot i\omega\, \hat{U}(t).$$

Also ist der *komplexe Widerstand*

$$\boxed{\hat{R}_C := \frac{\hat{U}(t)}{\hat{I}(t)} = \frac{1}{i\omega C} = -i\frac{1}{\omega C}.}$$

Einer Kapazität wird der komplexe Widerstand $\hat{R}_C = \frac{1}{i\omega C}$ zugeordnet. Spannung und Strom sind um $-90°$ verschoben. Bei diesen Überlegungen wurde die Formel $\left(e^{i\omega t}\right)' = i\omega\, e^{i\omega t}$ benutzt. Diese Gesetzmäßigkeit werden wir in Kap. 9.5.5 nachprüfen.

(3) Induktivität L. Bei einer Spule mit Induktivität L ist der Zusammenhang zwischen Strom und induzierter Spannung durch das **Induktionsgesetz**

$$U(t) = L\frac{d\, I(t)}{dt}$$

gegeben. Speziell für $\hat{I}(t) = \hat{I}_0\, e^{i\omega t}$ folgt

$$\hat{U}(t) = L\left(\hat{I}_0\, e^{i\omega t}\right)' = L\, \hat{I}_0\, e^{i\omega t}\, i\omega = i\omega L\, \hat{I}(t).$$

Einer Spule mit Induktivität L wird der *komplexe Widerstand*

$$\boxed{\hat{R}_L := \frac{\hat{U}(t)}{\hat{I}(t)} = i\omega L}$$

zugeordnet. $i\omega L$ liegt auf der positiven imaginären Achse. Die Phase zwischen Spannung und Strom beträgt $+90°$; die Spannung eilt dem Strom um $90°$ voraus.

Zusammenfassung: Für RCL-Netzwerke gelten bei Wechselspannungen, $\hat{U}(t) = \hat{U}_0\, e^{i\omega t}$, bzw. Wechselströmen, $\hat{I}(t) = \hat{I}_0\, e^{i\omega t}$, Ohmsche Gesetze der Form $\hat{U}(t) = \hat{R}\, \hat{I}(t)$, wenn den einzelnen Schaltelementen **komplexe Widerstände (Impedanzen)** $\hat{R}$ zugeordnet werden:

Ohmscher Widerstand R	$\hat{R}_\Omega$	$=$	R
Kapazität C	$\hat{R}_C$	$=$	$\frac{1}{i\omega C}$
Induktivität L	$\hat{R}_L$	$=$	$i\omega L$

Folgerung: Mit den Kirchhoffschen Regeln ergibt sich für die Ersatzschaltung zweier komplexer Widerstände $\hat{R}_1$ und $\hat{R}_2$ durch einen **komplexen Gesamtwiderstand (= Ersatzwiderstand)** $\hat{R}$:

(a) Reihenschaltung $\hat{R} = \hat{R}_1 + \hat{R}_2.$

(b) Parallelschaltung $\frac{1}{\hat{R}} = \frac{1}{\hat{R}_1} + \frac{1}{\hat{R}_2}$ bzw. $\hat{R} = \frac{\hat{R}_1\,\hat{R}_2}{\hat{R}_1 + \hat{R}_2}.$

$\mathrm{Re}\,\hat{R}$ heißt der *Wirkwiderstand*, $\mathrm{Im}\,\hat{R}$ der *Blindwiderstand* und $\left|\hat{R}\right|$ der *reelle Scheinwiderstand.*

Im Wechselstromkreis dürfen also die bekannten Regeln für die Ersatzschaltung von Widerständen wie im Gleichstromkreis verwendet werden, wenn bei Kapazität und Induktivität zu komplexen Widerständen übergegangen wird!

5.3.4 Beispiele für RCL-Wechselstromschaltungen

Beispiel 5.16 (RCL-Reihenschaltung, mit MAPLE-Worksheet):

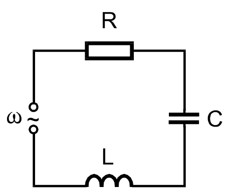


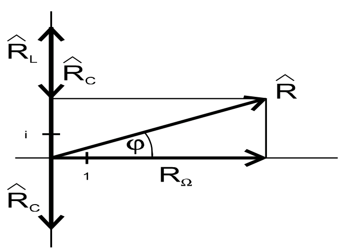
Abb. 5.9. RCL-Kreis

Nebenstehendes Bild zeigt eine Reihenschaltung aus je einem Ohmschen Widerstand R_Ω, einer Kapazität C und einer Induktivität L. Es addieren sich die komplexen Einzelwiderstände zum komplexen Gesamtwiderstand

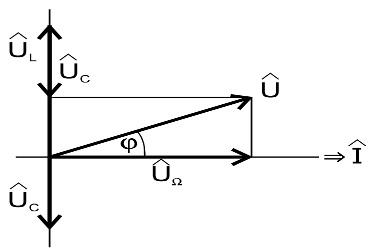
$$\hat{R} = R_\Omega + \hat{R}_C + \hat{R}_L = R_\Omega + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L$$

$$\boxed{\hat{R} = R_\Omega + i\left(\omega L - \tfrac{1}{\omega C}\right).}$$

Die Addition ist graphisch durch das Zeigerdiagramm gegeben.



Zeigerdiagramm



Spannungsdiagramm

Der *Blindwiderstand* ist $\operatorname{Im}\hat{R} = \omega L - \frac{1}{\omega C}$, der *Wirkwiderstand* ist $\operatorname{Re}\hat{R} = R_\Omega$ und der **reelle Scheinwiderstand**

$$\boxed{R = \left|\hat{R}\right| = \sqrt{R_\Omega^2 + \left(\omega L - \tfrac{1}{\omega C}\right)^2}.}$$

Die **Phase** zwischen Spannung und Strom erhält man aus

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{\operatorname{Im}\hat{R}}{\operatorname{Re}\hat{R}} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R_\Omega}.}$$

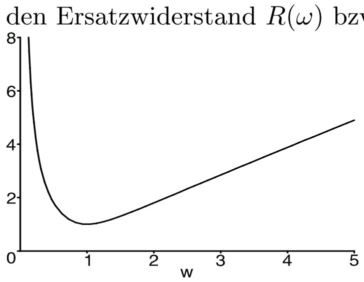
Diskussion: Multipliziert man die Widerstände jeweils mit $\hat{I}$, erhält man das zugehörige Spannungsdiagramm:

(1) U_Ω fällt am Ohmschen Widerstand ab und ist mit dem Strom I in Phase.

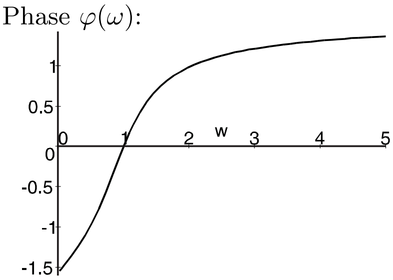
(2) U_L fällt an der Induktivität ab. U_L eilt dem Strom um 90° voraus.

(3) U_C fällt an der Kapazität ab. U_C hinkt dem Strom um 90° nach.

Für $R = 1$, $L = 1$ und $C = 1$ erhält man die folgende graphische Darstellung für den Ersatzwiderstand $R(\omega)$ bzw. die Phase $\varphi(\omega)$:



Ersatzwiderstand $R(\omega)$



Phase $\varphi(\omega)$ □

Beispiel 5.17 (LC-Parallelkreis, mit MAPLE-Worksheet):
Für die in Abbildung 5.10 gezeichnete Schaltung berechnet man den komplexen Ersatzwiderstand, indem zuerst L und R_2 ersetzt werden durch den Reihenersatzwiderstand $R_r = R_2 + i\omega L$. R_r liegt parallel zu C, so dass sich die Leitwerte addieren

$$Z_p = i\,\omega\,C + \frac{1}{i\,\omega\,L + R_2}.$$

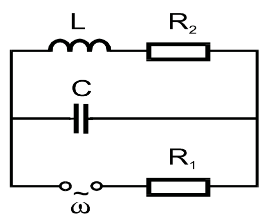


Abb. 5.10. LC-Parallelkreis

Der komplexe Gesamtwiderstand setzt sich nun zusammen aus der Summe von R_1 und $R_p = \frac{1}{Z_p}$:

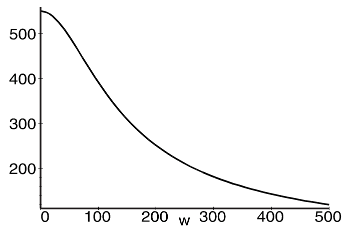
$$R_{ges} = R_1 + \frac{1}{Z_p} = R_1 + \frac{1}{i\,\omega\,C + \frac{1}{i\,\omega\,L + R_2}}$$

$$R_{ges} = \frac{R_1\,\omega^2\,C\,L - R_1\,\omega\,C\,R_2\,i - R_1 - \omega\,L\,i\, - R_2}{\omega^2\,C\,L - \omega\,C\,R_2\,i\, - 1}.$$

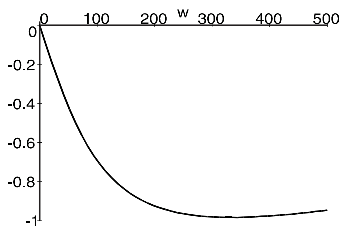
Man erkennt in dieser Darstellung, dass der Gesamtwiderstand eine komplexe rationale Funktion in ω ist und 2 der höchste auftretende Exponent. Dies spiegelt die Tatsache wider, dass der Schaltkreis zwei Energiespeicher, nämlich C und L besitzt. Für die Werte $C = 20 \cdot 10^{-6}, L = 20 \cdot 10^{-3}, R_1 = 50, R_2 = 500$ ergibt sich der Gesamtwiderstand als Funktion in ω

$$R_{ges} = \frac{0.8000\,10^{-11}\,\omega^4 + 0.004960\,\omega^2 + 550}{0.1600\,10^{-12}\,\omega^4 + 0.00009920\,\omega^2 + 1} + \frac{(\,-0.8000\,10^{-8}\,\omega^3 - 4.980\,\omega\,)\,i}{0.1600\,10^{-12}\,\omega^4 + 0.00009920\,\omega^2 + 1}.$$

Die Kurvenverläufe von Gesamtwiderstand und Phase in Abhängigkeit von ω sind gegeben durch



Gesamtwiderstand $R(\omega)$



Phase $\varphi(\omega)$ □

MAPLE-Worksheets zu Kapitel 5

Die folgenden elektronischen Arbeitsblätter stehen für Kapitel 5 mit MAPLE zur Verfügung.

- Darstellung komplexer Zahlen mit MAPLE
- Komplexes Rechnen mit MAPLE
- Visualisierung der komplexen Rechenoperationen
- Überlagerung von Schwingungen
- RCL-Wechselstromkreise mit MAPLE
- Übertragungsverhalten von Filterschaltungen
- MAPLE-Lösungen zu den Aufgaben

5.4 Aufgaben zu komplexen Zahlen

5.1 Geben Sie die Exponentialform der folgenden komplexen Zahlen an
a) $3\sqrt{3}+3\,i$ b) $-2-2\,i$ c) $1-\sqrt{3}\,i$ d) 5 e) $-5\,i$ f) -1

5.2 Wie lautet die trigonometrische und algebraische Normalform von
a) $3\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ b) $2\,e^{i\,\frac{2\pi}{3}}$ c) $e^{i\,\pi}$ d) $4\,e^{i\,\frac{4\pi}{3}}$

5.3 Welches sind die zugehörigen komplex konjugierten Zahlen
a) $3+\sqrt{2}\,i$ b) $4\,(\cos 125^\circ + i\,\sin 125^\circ)$ c) $5\,e^{i\,\frac{3}{2}\,\pi}$ d) $\sqrt{3}\,e^{i\,0.734}$

5.4 Man bestimme die trigonometrische Normalform von
a) $-1+\sqrt{3}\,i$ b) $-1+i$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ d) $-3-4i$

5.5 Berechnen Sie
a) $2\,(5-3\,i)-3\,(-2+i)+5\,(i-3)$ b) $(3-2\,i)^3$ c) $\dfrac{5}{3-4\,i}+\frac{10}{4+3\,i}$
d) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{10}$ e) $\left|\dfrac{2-4\,i}{5-7\,i}\right|^2$ f) $\dfrac{(1+i)\,(2+3\,i)\,(4-2\,i)}{(1+2\,i)^2\,(1-i)}$

5.6 Sei $z_1 = 1-i$, $z_2 = -2+4\,i$, $z_3 = \sqrt{3}-2\,i$. Wie lautet die algebraische Normalform von
a) $z_1^2+2\,z_1-3$ b) $|2\,z_2-3\,z_1|^2$ c) $(z_3-z_3^*)^5$
d) $|z_1\,z_2^*+z_2\,z_1^*|$ e) $\left|\frac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+i}\right|$ f) $\frac{1}{2}\left(\frac{z_3}{z_3^*}+\frac{z_3^*}{z_3}\right)$
g) $((z_2+z_3)\,(z_1-z_3))^*$ h) $\left|z_1^2+z_2^{*\,2}\right|^2+\left|z_3^{*\,2}-z_2^2\right|^2$ i) $\mathrm{Im}\left\{\frac{z_1\,z_2}{z_3}\right\}$

5.7 Berechnen Sie
a) $\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)^{10}$ b) $[2\,(\cos 45^\circ + i\,\sin 45^\circ)]^3$ c) $\left(3\sqrt{3}+3\,i\right)^6$ d) $\left(2\,e^{i\,\frac{5}{3}\,\pi}\right)^7$

5.8 Geben Sie im Komplexen alle Lösungen an von
a) $z^4+81=0$,
b) $z^6+1=\sqrt{3}\,i$

5.9 Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von
a) $z^5-2\,z^4-z^3+6\,z-4=0$
b) $4\,x^4+4\,x^3-7\,x^2+x-2=0$

5.10 Lösen Sie Aufgaben 5.1 - 5.9 mit Maple.

5.11 Wie lauten der Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen
a) $\dfrac{-2+7\,i}{15\,i}$ b) $\dfrac{1+i}{1-i}$ c) $\dfrac{1-i}{1+2\,i}-\dfrac{1+3\,i}{1-2\,i}$ d) $\dfrac{2\,e^{\frac{i\,\pi}{4}}}{(1+i)\,(2+i)}$ e) $2\,e^{i\,120^\circ}$
f) $3\,e^{i\,\frac{5\,\pi}{6}}$ g) $-5\,e^{-i\,\frac{\pi}{2}}$ h) $7\,e^{i\,\pi}$ i) $\dfrac{2-i}{2+i}\cdot e^{-i\,\frac{\pi}{3}}$
Wie groß sind jeweils Betrag und Winkel?

5.12 Wie heißen die folgenden komplexen Zahlen in Exponentialform? (Verwenden Sie zur Berechnung Maple.)
a) $-1-i$ b) $-1+i$ c) $3+4\,i$ d) $-3-4\,i$ e) $2\,i$ f) -2 g) $1-2\,i$

5.13 Es sei $z = x + i\,y$ und z^* die zu z konjugiert komplexe Zahl. Bestimmen Sie mit MAPLE
a) $a = \left|\frac{z}{z^*}\right|$ b) $b = \text{Re}\,\left\{z^{-2}\right\}$ c) $c = \text{Im}\,\left\{z^{*\,3}\right\}$ d) $d = \text{Im}\,\left\{\left(z^3\right)^*\right\}$

5.14 Berechnen Sie mit MAPLE
a) $\left(\frac{3+4\,i}{5}\right)^{10}$ b) $\left(i + \frac{1}{1+i}\right)^6$ c) $\left[(1+i)\cdot e^{-i\,\frac{\pi}{6}}\right]^9$

5.15 Berechnen Sie mit MAPLE alle reellen und komplexen Lösungen der Gleichungen

a) $z^3 = i$ b) $z^2 = -1 + i\,\sqrt{3}$ c) $32\,z^5 - 243 = 0$
d) $z^3 + \frac{4}{1+i} = 0$ e) $z^4 + \frac{1+2\,e^{i\,\frac{\pi}{2}}}{2+e^{-i\,\frac{\pi}{2}}} = 0$ f) $z^2 - 2\,i\,z + 3 = 0$

5.16 Bestimmen Sie mit MAPLE alle Nullstellen der Funktion $z^4 - 3\,z^3 + 2\,z^2 + 2\,z - 4$.

5.17 a) Berechnen Sie den komplexen und reellen Scheinwiderstand für die in Abb. 1a skizzierte Reihenschaltung ($R = 100\Omega$, $C = 20\mu F$, $L = 0.2H$, $\omega = 10^6\,\frac{1}{s}$).
b) Bestimmen Sie den komplexen und reellen Scheinwiderstand für die in Abb. 1b skizzierte Parallelschaltung ($R = 100\Omega$, $L = 0.5H$, $\omega = 500\frac{1}{s}$).

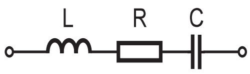


Abb. 1a

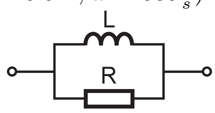


Abb. 1b

5.18 a) Man berechne den komplexen Scheinwiderstand der in Abb. 2a dargestellten Schaltung als Funktion von ω.
b) Man berechne den komplexen Scheinwiderstand der in Abb. 2b dargestellten Schaltung bei einer Kreisfrequenz $\omega = 300\,s^{-1}$ für die Parameter $R_1 = 50\Omega$, $L_1 = 1H$, $R_2 = 300\Omega$, $C_1 = 10\mu F$, $R_3 = 20\Omega$, $L_2 = 1.5H$.

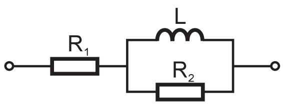


Abb. 2a

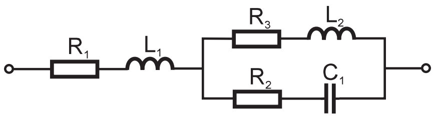


Abb. 2b

5.19 Gegeben sind die beiden Wechselspannungen $u_1\,(t)$ und $u_2\,(t)$. Man bestimme die durch Superposition entstehende resultierende Wechselspannung $\left(\omega = 314\,\frac{1}{s}\right)$:
$u_1\,(t) = 100\,V \cdot \sin\,(\omega t)$ $u_2\,(t) = 150\,V \cdot \cos\,\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$
und zeichne alle drei Graphen in ein Schaubild.

5.20 Die mechanischen Schwingungen $y_1\,(t) = 20\,cm \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{10}\right)$ und $y_2\,(t) = 15\,cm \cdot \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ werden ungestört zur Überlagerung gebracht. Wie lautet die resultierende Schwingung? (Man rechne in der Kosinusdarstellung!)

5.21 Man zeige zeichnerisch, dass
$3\,\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + 2\,\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = A\,\cos\,(\omega t + \varphi)$
mit $A \approx 5$, $\varphi \approx 36°$.