

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|----|
| 1 | Einführung | 1 |
| 1.1 | Allgemeine Bemerkungen | 1 |
| 1.2 | Einleitende Beispiele | 3 |
| 1.3 | Überblick | 10 |
| 2 | Modellierung und Simulationen mit finiten Differenzenverfahren .. | 13 |
| 2.1 | Modellgleichungen elektrostatischer Probleme | 14 |
| 2.2 | Das eindimensionale elektrostatische Problem | 16 |
| 2.3 | Das zweidimensionale elektrostatische Problem | 20 |
| 2.3.1 | Diskrete Beschreibung der Geometrie | 20 |
| 2.3.2 | Ersetzen der partiellen Ableitungen durch finite Differenzen... | 22 |
| 2.3.3 | Aufstellen des linearen Gleichungssystems | 24 |
| 2.3.4 | Lösen des linearen Gleichungssystems durch geeignete Methoden | 25 |
| 2.3.5 | Lineare Interpolation | 28 |
| 2.4 | Verallgemeinerung | 31 |
| 2.5 | Aufgaben zur finiten Differenzenmethode | 33 |
| 3 | Randangepasste Gitter | 35 |
| 3.1 | Beschreibung anwendungsrelevanter Gebiete | 35 |
| 3.2 | Erzeugung von randangepassten Gittern | 37 |
| 3.3 | Lösen der Poisson-Gleichung auf randangepassten Gittern | 43 |
| 3.4 | Aufgaben zu randangepassten Gittern | 49 |
| 4 | Finite-Elemente-Methode für eindimensionale Probleme | 51 |
| 4.1 | Variationsproblem statt Differenzialgleichung | 51 |
| 4.2 | Minimierung des Energiefunktionals | 55 |
| 4.3 | Beispiele | 59 |
| 4.4 | Aufgaben zur Finiten-Elemente-Methode (1D) | 64 |
| 5 | Finite-Elemente-Methode bei elliptischen Randwertproblemen ... | 67 |
| 5.1 | Triangulierung mit linearen Basisfunktionen | 70 |
| 5.2 | Visualisierung der Finiten-Elemente-Methode | 76 |
| 5.3 | Triangulierung mit linearen Elementfunktionen | 79 |
| 5.4 | Rechteckzerlegung mit bilinearen Elementfunktionen | 82 |
| 5.5 | Triangulierung mit quadratischen Elementfunktionen | 85 |
| 5.6 | Aufgaben zur Finiten-Elemente-Methode (2D) | 94 |

| | | |
|-----------------------------------|--|-----|
| 6 | Einführung in ANSYS | 97 |
| 6.1 | Die Benutzeroberfläche von ANSYS | 98 |
| 6.2 | Elektrostatische Simulation | 100 |
| 6.3 | Thermische Simulation | 104 |
| 6.4 | Mechanische Simulation | 113 |
| 6.5 | Magnetische Simulation: Stromdurchflossener Leiter | 122 |
| 6.6 | Aufgaben zu ANSYS | 130 |
| 7 | ANSYS-Simulationen - Projektarbeiten | 135 |
| 7.1 | Kräftebestimmung bei Schraubenschlüssel und Schrauben | 136 |
| 7.2 | Modalanalyse eines Ultraschallgebers | 137 |
| 7.3 | Kapazitives System zur Füllstandsmessung bei Hubschraubern | 140 |
| 7.4 | Simulation eines Beschleunigungsmess-Systems | 143 |
| 7.5 | Optimierung des Temperaturprofils eines SnO_2 -Sensors | 146 |
| 7.6 | Optimierung einer Fingerspule für die Kernspintomographie | 148 |
| 7.7 | Magnetfeldberechnung bei Planarspulen | 151 |
| 7.8 | Ausbreitung elektromagnetischer Strahlung | 153 |
| Anhang | | |
| A | Lösen von großen linearen Gleichungssystemen | 157 |
| A.1 | Direkte Verfahren | 158 |
| A.2 | Klassische iterative Verfahren | 163 |
| A.3 | Das Verfahren der konjugierten Gradienten | 172 |
| A.4 | Aufgaben zum Lösen von großen LGS | 177 |
| B | Numerisches Differenzieren | 179 |
| B.1 | Differenzenformeln für die erste Ableitung | 179 |
| B.2 | Differenzenformeln für die zweite Ableitung | 184 |
| B.3 | Differenzenformeln für die n -te Ableitung | 185 |
| B.4 | Aufgaben zum numerischen Differenzieren | 186 |
| C | Logfiles | 187 |
| C.1 | Elektrostatische Simulation | 187 |
| C.2 | Statische, thermische Simulation | 188 |
| C.3 | Transiente, thermische Simulation: Ein-Last-Simulation | 189 |
| C.4 | Transiente, thermische Simulation: Mehr-Lasten-Simulation | 190 |
| C.5 | Mechanische Simulation (statisch) | 191 |
| C.6 | Mechanische Simulation (Modalanalyse) | 193 |
| C.7 | Gleichstrom Simulation | 195 |
| C.8 | Wechselstrom Simulation | 196 |
| Literaturverzeichnis | | 199 |
| Index | | 201 |
| ANSYS-Index | | 203 |
| Homepage zum Buch | | 205 |

2. Modellierung und Simulationen mit finiten Differenzenverfahren

Wir werden in diesem Kapitel die Methode der finiten Differenzen einführen, um beliebige partielle Differenzialgleichungen bezüglich den Ortskoordinaten numerisch zu lösen. Wir beschränken uns bei der Beschreibung der Methoden auf zweidimensionale elektrostatische Probleme, da man für diese Probleme die Möglichkeit hat, sie messtechnisch zu erfassen. Man ist somit in der Lage, die numerischen Lösungen mit experimentellen Messungen zu vergleichen. Die Methode der finiten Differenzen ist aber nicht auf die zweidimensionalen elektrostatischen Probleme beschränkt, sondern sie ist auf den dreidimensionalen Fall und auf andere partielle Differenzialgleichungen direkt übertragbar.

Das von einem System geladener Elektroden erzeugte elektrische Feld ist qualitativ das gleiche, unabhängig davon, ob es sich in Luft oder in einem Elektrolyten befindet. In beiden Fällen treten keine feldverzerrenden Raumladungen auf. Diese Tatsache liefert eine bequeme Methode zur experimentellen Ermittlung des Verlaufs solcher Felder: *der elektrostatische Trog*: Man kopiert das zu untersuchende Elektrodensystem, bringt es in einen Elektrolyten, erzeugt an ihm dem Original entsprechende Spannungsverhältnisse und misst die Spannungen im Innern z.B. mit einer Drahtsonde.

Genau genommen ermittelt man Äquipotenziallinien, d.h. Linien mit gleichem elektrischen Potenzial. Die elektrischen Feldlinien stehen auf diesen Linien senkrecht; das elektrische Feld ist durch den lokalen Gradienten der Potenzialverteilung gegeben. Mathematisch formuliert ist das Potenzial Φ eine Funktion von den zwei Ortsvariablen x und y , $\Phi(x, y)$, und die elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = -\text{grad}(\Phi) = - \begin{pmatrix} \partial_x \Phi(x, y) \\ \partial_y \Phi(x, y) \end{pmatrix}.$$

In Abbildung 2.1 sind die Potenzialverläufe für ein Drei-Elektroden-System mit Spaltblende angegeben. Beide Abbildungen sind experimentell ermittelte Daten, die im Rahmen eines physikalischen Praktikums an der Hochschule Karlsruhe ermittelt wurden. In Abb. 2.1 (b) mit und in Abb. 2.1 (a) ohne Durchgriff. Die Potenzialwerte der Äquipotenziallinien sind die im Bild unten angegebenen Werte.

Die linke Elektrode liegt in beiden Fällen auf 10 V , die Zwischenelektrode auf 0 V . Der einzige Unterschied zwischen den beiden Konfigurationen besteht im Potenzialwert der rechten Elektrode: In der linken Anordnung beträgt das Potenzial 4 V ; in der rechten 2 V .

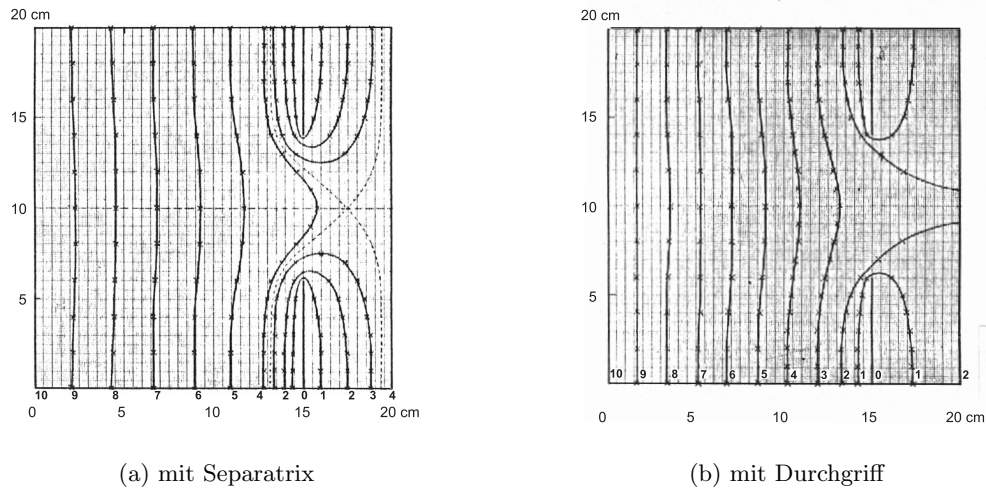


Abb. 2.1. Potenzialverteilung im elektrostatischen Trog.

Vergleicht man die beiden Abbildungen, erkennt man sehr gut, dass die Potenzialverteilung im Innern des Gebietes nicht nur quantitativ, sondern auch qualitativ unterschiedlich ist, je nachdem welchen Wert die Spannung auf der rechten Elektrode hat. Dies ist charakteristisch für alle elektrostatischen Probleme: **Die Ränder und Randbedingungen (sowohl die Form als auch die Werte) bestimmen den Verlauf der Lösung im Innern des Gebiets. Es müssen folglich auch bei der Simulation immer die Randbedingungen vollständig spezifiziert werden.**

Im Folgenden werden wir numerische Verfahren kennenlernen, um solche elektrostatischen Konfigurationen zu berechnen. Damit werden wir dann in der Lage sein, numerische Experimente durchzuführen und die Potenzialverteilung bzw. das elektrische Feld zu gegebener Anordnung zu bestimmen.

Zunächst stellen wir die Modellgleichungen für elektrostatische Probleme auf. Diese Modellgleichungen sind für alle elektrostatischen Probleme universell gültig. Allerdings lassen sie sich in der Regel nur näherungsweise lösen. Wir führen die finite Differenzenmethode für das eindimensionale Problem ein und vergleichen für dieses Problem die numerische Lösung mit der exakten. Anschließend verallgemeinern wir die Methode auf den zweidimensionalen Fall.

2.1 Modellgleichungen elektrostatischer Probleme

Die Beschreibung elektrostatischer Probleme erfolgt durch drei physikalische Größen: die Ladungsdichte ρ , das elektrostatische Potenzial Φ und das elektrische Feld \vec{E} . Da wir uns im Folgenden auf eine zweidimensionale Diskussion beschränken, hängen diese

Größen dann nur von den beiden Ortsvariablen x und y ab. Die drei Beschreibungsgrößen werden durch zwei universell geltende Gleichungen verknüpft:

→ Das von einem System geladener Elektroden erzeugte elektrische Feld wird durch den Gradienten des elektrostatischen Potentials $\Phi(x, y)$ beschrieben:

$$\vec{E}(x, y) = - \operatorname{grad} \Phi(x, y) = - \begin{pmatrix} \partial_x \Phi(x, y) \\ \partial_y \Phi(x, y) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Das elektrische Feld ist also der negative Gradient des Potentials.

→ Der Gaußsche Satz verknüpft das elektrische Feld mit der im System vorhandenen Ladungsdichte $\rho(x, y)$

$$\nabla \vec{E}(x, y) = \frac{1}{\epsilon} \rho(x, y). \quad (2.2)$$

Dieser Satz besagt, dass die Quellen des elektrischen Feldes die Ladungsdichten sind. ϵ ist dabei die Dielektrizitätskonstante. Für Vakuum gilt $\epsilon = \epsilon_0 = 8.8 \cdot 10^{12} \frac{F}{m}$.

Setzt man Gleichung (2.1) in (2.2) ein

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \rho(x, y) &= \nabla \vec{E}(x, y) = \partial_x E_1(x, y) + \partial_y E_2(x, y) \\ &= \partial_x (-\partial_x \Phi(x, y)) + \partial_y (-\partial_y \Phi(x, y)) \\ &= -\partial_x^2 \Phi(x, y) - \partial_y^2 \Phi(x, y) \end{aligned}$$

erhält man die **Poisson-Gleichung**

$$\Phi_{xx}(x, y) + \Phi_{yy}(x, y) = -\frac{1}{\epsilon} \rho(x, y). \quad (2.3)$$

Für den ladungsfreien Raum ($\rho = 0$) gilt die **Laplace-Gleichung**

$$\Phi_{xx}(x, y) + \Phi_{yy}(x, y) = 0. \quad (2.4)$$

Oftmals kürzt man die linke Seite der Differentialgleichung durch den Laplace-Operator $\Delta \Phi(x, y) := \Phi_{xx}(x, y) + \Phi_{yy}(x, y)$ ab, so dass man die Laplace-Gleichung in der Form $\Delta \Phi(x, y) = 0$ schreibt.

Die gute Nachricht über die Poisson- bzw. Laplace-Gleichung ist, dass alle elektrostatischen Probleme durch sie beschrieben werden. Die schlechte Nachricht dabei ist allerdings, dass man sie in der Regel für die wenigsten technischen Probleme mathematisch exakt lösen kann. Jedes Programm, das in der Lage ist diese Differentialgleichung näherungsweise zu lösen, kann daher beliebige elektrostatische Probleme näherungsweise bestimmen.

Zusammenfassung: Elektrostatische Modellgleichungen.

Jedes zweidimensionale elektrostatische Problem lässt sich bei gegebener Ladungsdichte ρ durch die Poisson-Gleichung

$$\Phi_{xx}(x, y) + \Phi_{yy}(x, y) = -\frac{1}{\epsilon}\rho(x, y)$$

beschreiben. Für den ladungsfreien Raum gilt die Laplace-Gleichung

$$\Phi_{xx}(x, y) + \Phi_{yy}(x, y) = 0.$$

Im Folgenden werden wir die finite Differenzenmethode anwenden, um eine Näherungslösung für diese partielle Differentialgleichung auf *achsenparallelen* Gittern zu bestimmen. Bevor wir jedoch das Problem im Zweidimensionalen lösen, werden wir die Differenzenmethode für den eindimensionalen Fall einführen:

2.2 Das eindimensionale elektrostatische Problem

Gesucht ist die Potenzialverteilung in einem ebenen Plattenkondensator siehe Abbildung 2.2 mit Spaltabstand d , Kathodenpotenzial Φ_K und Anodenpotenzial Φ_A .

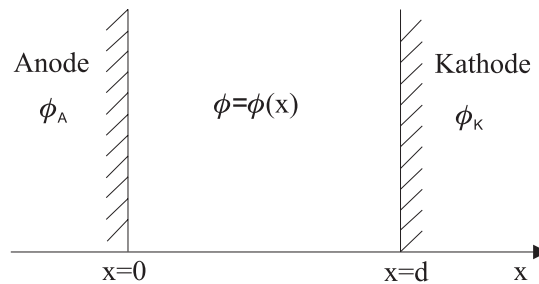


Abb. 2.2. Ebener Plattenkondensator.

Für den ebenen Plattenkondensator ist das Potenzial nur eine Funktion von x , d.h. $\Phi = \Phi(x)$, so dass die Laplace-Gleichung (2.4) sich reduziert zu

$$\Phi''(x) = 0.$$

Durch zweimalige Integration erhalten wir in diesem einfachsten Fall den exakten Verlauf des Potenzials

$$\Phi(x) = \Phi_K \left(\frac{x}{d}\right) + \Phi_A \left(1 - \frac{x}{d}\right),$$

wobei die Randbedingungen $\Phi(0) = \Phi_A$ und $\Phi(d) = \Phi_K$ berücksichtigt sind. Das Potenzial nimmt linear vom Anoden- zum Kathodenpotenzial ab.

Wir werden dieses eindimensionale Problem nun *numerisch* lösen. Im Gegensatz zur exakten Lösung können wir mit dem Rechner das Potenzial nicht an *allen* Punkten im Raum berechnen. Dies würde unendlich viel Speicher und Rechenzeit benötigen. Da wir die Potenzialverteilung also *nicht kontinuierlich*, sondern nur an bestimmten, *diskreten* Punkten berechnen können, führen wir diskrete Gitterpunkte auf der x -Achse ein und berechnen die gesuchte Funktion $\Phi(x)$ nur an diesen Gitterpunkten.

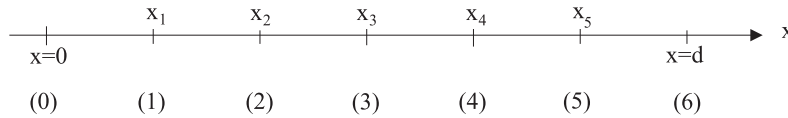


Abb. 2.3. Diskrete Gitterpunkte.

Für das obige eindimensionale Beispiel führen wir insgesamt **7** Gitterpunkte x_0, \dots, x_6 ein und bestimmen das unbekannte Potenzial auf den fünf Gitterpunkten x_1, \dots, x_5 . Das Potenzial ist am Rand bei $x_0 = 0$ und $x_6 = d$ durch die Randbedingung Φ_A und Φ_K vorgegeben. Die gesuchte Funktion Φ ist in jedem inneren Punkt durch die Bedingung $\Phi''(x) = 0$ bestimmt. Denn die zweidimensionale Laplace-Gleichung reduziert sich im Falle von nur einer Variablen x zu dieser gewöhnlichen Differentialgleichung. Also gilt insbesondere an den fünf Gitterpunkten x_1, \dots, x_5

$$\Phi''(x_i) = 0 \quad i = 1, \dots, 5.$$

Da wir die Funktion nur an den diskreten Gitterpunkten zur Verfügung haben, ersetzen wir die Ableitung $\Phi''(x_i)$ durch den zentralen Differenzenquotienten

$$\Phi''(x_i) \sim \frac{\Phi(x_{i-1}) - 2\Phi(x_i) + \Phi(x_{i+1}))}{h^2} \quad i = 1, \dots, 5$$

mit $h = x_{i+1} - x_i$. Mit der Notation $\Phi_i = \Phi(x_i)$ (vgl. Abbildung 2.4) folgt

$$\Phi''(x_i) \sim \frac{\Phi_{i-1} - 2\Phi_i + \Phi_{i+1}}{h^2}.$$

Die Herleitung der Differenzenformeln für die Ableitungen auch höherer Ordnung sind im Anhang B separat in einem eigenständigen Kapitel beschrieben.

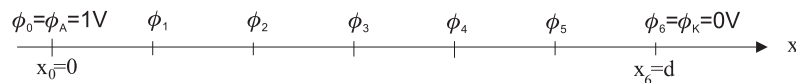


Abb. 2.4. Numerische Approximation.

Wir ersetzen die kontinuierliche Ableitung der Laplace-Gleichung $\Phi''(x) = 0$ an jedem inneren Gitterpunkt x_i durch die numerische Approximation und erhalten

$$\begin{aligned} x_1: & \Phi_0 - 2\Phi_1 + \Phi_2 = 0 \\ x_2: & \Phi_1 - 2\Phi_2 + \Phi_3 = 0 \\ x_3: & \Phi_2 - 2\Phi_3 + \Phi_4 = 0 \\ x_4: & \Phi_3 - 2\Phi_4 + \Phi_5 = 0 \\ x_5: & \Phi_4 - 2\Phi_5 + \Phi_6 = 0 \end{aligned}$$

wobei Φ_0 und Φ_6 die vorgegebenen Randbedingungen sind: $\Phi_0 = \Phi_A = 1V$, $\Phi_6 = \Phi_K = 0V$.

$$\begin{aligned} -2\Phi_1 + \Phi_2 &= -1V \\ \Phi_1 - 2\Phi_2 + \Phi_3 &= 0 \\ \Phi_2 - 2\Phi_3 + \Phi_4 &= 0 \\ \Phi_3 - 2\Phi_4 + \Phi_5 &= 0 \\ \Phi_4 - 2\Phi_5 &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares inhomogenes Gleichungssystem für die fünf Unbekannten $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ und Φ_5 :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right).$$

Das linke Koeffizientenschema basiert auf einer Tridiagonalmatrix: Nur die Elemente der Hauptdiagonalen und den beiden Nebendiagonalen sind von Null verschieden. Durch Lösen des Tridiagonalsystems mit dem **Thomas-Algorithmus** (siehe Anhang A: Lösen von großen linearen Gleichungssystemen) erhält man das rechte Koeffizientenschema und durch Rückwärtsauflösen die Lösung:

$$\Phi_5 = \frac{1}{6}, \Phi_4 = \frac{1}{3}, \Phi_3 = \frac{1}{2}, \Phi_2 = \frac{2}{3}, \Phi_1 = \frac{5}{6}.$$

Dies ist die gesuchte Lösung an den diskreten Punkten x_1, \dots, x_5 . Für die graphische Darstellung verbinden wir die Punkte geradlinig, so dass wir eine stetige, stückweise lineare Funktion als numerische Lösung erhalten:

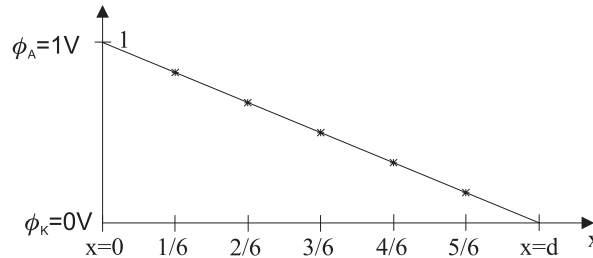


Abb. 2.5. Graphische Darstellung des Ergebnisses.

Diskussion: Im Fall des ebenen Plattenkondensators erhalten wir durch das numerische Verfahren die exakte Lösung! Dies liegt daran, dass die Lösung des Problems eine lineare Funktion ist und das Differenzenverfahren lineare Funktionen exakt differenziert. In der Regel wird dies nicht der Fall sein: Denn das numerische Verfahren liefert nur eine Approximation an die exakte Lösung! Diese numerische Lösung wird umso besser (genauer) je mehr Gitterpunkte verwendet werden, wenn man Rundungsfehler vernachlässigt. Berücksichtigt man allerdings Rundungsfehler, dann wächst der Gesamtfehler für zu kleine Gitterabstände wieder stark an (siehe Anhang B).

Führen wir 5 innere Gitterpunkte ein, erhalten wir 5 Unbekannte und eine 5×5 -Matrix. Wählen wir 50 oder 100 Gitterpunkte, dann bekommen wir 50 bzw. 100 Unbekannte und müssen ein 50×50 - bzw. ein 100×100 -System lösen. Die Struktur der Matrix bleibt dabei aber erhalten, da für jeden Gitterpunkt immer nur die Information am betrachteten Punkt sowie der direkt benachbarten Punkte einfließt! \square

Zusammenfassung: Finite Differenzenmethode.

Der in diesem Abschnitt aufgezeigte Weg ist grundlegend für alle finite Differenzenverfahren:

- (1) **Ersetzen der Geometrie durch diskrete Punkte:** Die Geometrie wird durch die gewählten Gitterpunkte repräsentiert.
- (2) **Ersetzen der Ableitungen durch finite Differenzen:** Nicht die eigentliche Modellgleichung wird gelöst, sondern die diskretisierte Differenzgleichung.
- (3) **Aufstellen des zugehörigen LGS:** Das Gleichungssystem enthält genau so viele Gleichungen wie Unbekannte (= Anzahl der Gitterpunkte). Für lineare Differenzialgleichungen sind die Differenzgleichungen lineare Gleichungssysteme.
- (4) **Lösen des LGS mit einer geeigneten Methode:** In dem diskutierten Beispiel wird der Thomas-Algorithmus gewählt.
- (5) **Lineare Interpolation zwischen den diskreten Punkten:** Durch das Lösen der Differenzgleichungen erhält man die Lösung nur an den Gitterpunkten. Man hat keine weitere zusätzliche Information dazwischen. Als einfachste Methode wählt man die lineare Verbindung der Lösungswerte.

$\triangle!$ **Achtung:** Die Differenzenmethode besitzt zwei **systematische Fehlerquellen:**

- ① Die Geometrie wird nicht kontinuierlich beschrieben, sondern durch endlich viele, diskrete Gitterpunkte.
- ② Statt der physikalischen Modellgleichung (Differenzialgleichung) löst man die diskretisierte Differenzialgleichung.

2.3 Das zweidimensionale elektrostatische Problem

Im Folgenden diskutieren wir ein zweidimensionales elektrostatisches Problem am Beispiel des in Abbildung 2.6 angegebenen Drei-Elektroden-Systems mit Spaltblende:

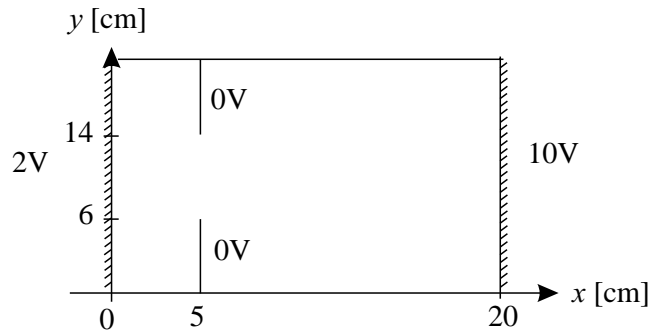


Abb. 2.6. Drei-Elektroden-System mit Spaltblende.

Da in diesem System das Potenzial Φ eine Funktion von x und y ist, muss man eine zweidimensionale Beschreibung wählen. Wie beim eindimensionalen Fall kann die gesuchte Potenzialverteilung $\Phi(x, y)$ nicht als kontinuierliche Funktion im ganzen Berechnungsgebiet bestimmt werden, sondern an gewissen (=diskreten) Punkten. Die im Abschnitt 2.2 eingeführte Differenzenmethode wenden wir nun auf das zweidimensionale Randwertproblem an. Wir folgen der Zusammenfassung für den eindimensionalen Fall und führen ein zweidimensionales Berechnungsgitter ein, um $\Phi(x, y)$ an den diskreten Gitterpunkten zu bestimmen.

2.3.1 Diskrete Beschreibung der Geometrie

Als Ränder der Geometrie werden im obigen Problem nicht nur die äußeren Ränder $\Phi(x = 0, y) = \Phi_k$ und $\Phi(x = d, y) = \Phi_A$ berücksichtigt, sondern zusätzlich auch die inneren Ränder $\Phi(x = 5, 0 \leq y \leq 6) = 0V$ und $\Phi(x = 5, 14 \leq y \leq 20) = 0V$. Damit muss das Gitter so gewählt werden, dass die Spaltblenden durch Gitterpunkte dargestellt werden. Die Linien bzw. die Punkte in Abbildung 2.7(a) und Abbildung 2.7(b) dienen als ein solches diskretes Gitter.

Wir definieren die Gitterlinien parallel zu den Koordinatenachsen. Dazu wählen wir eine gleichmäßige Unterteilung sowohl in x - als auch in y -Richtung von 40 Intervallen. Damit erhält man 41 Gitterpunkte jeweils in x - und 41 Gitterpunkte in y -Richtung (d.h. insgesamt 41×41 Gitterpunkte).

$$\Delta x = \frac{d}{40} = \frac{200\text{mm}}{40} = 5\text{mm}; \quad \Delta y = \frac{200\text{mm}}{40} = 5\text{mm}.$$

Die Gitterpunkte werden gemäß der Anordnung einer Matrix als Array gespeichert: $x_{[1...41,1...41]}, y_{[1...41,1...41]}$. In unserem Fall sind die Koordinaten der Gitterpunkte

$$x_{[i,j]} = (i - 1)\Delta x \quad \text{und} \quad y_{[i,j]} = (j - 1)\Delta y.$$

Insbesondere wird durch diese Wahl der Gitterpunkte die Spaltblende durch Gitterpunkte repräsentiert!

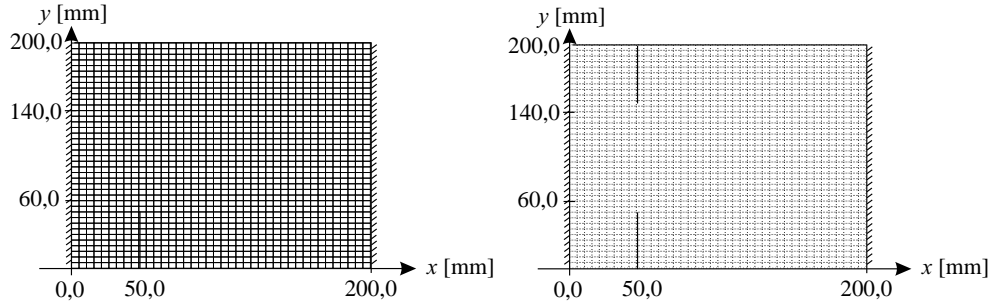


Abb. 2.7. Gitter für das Drei-Elektroden-System.

⚠ Achtung: Ein äquidistantes 42×42 -Gitter ist für das Drei-Elektroden-System nicht möglich, um die Geometrie zu repräsentieren. Denn in diesem Fall würden die inneren Elektroden nicht durch Gitterpunkte erfasst werden; sie wären somit in der Simulation nicht vorhanden und man würde den ebenen Plattenkondensator ohne Spaltblende simulieren. Entweder muss man auf die Forderung eines äquidistanten Gitters mit konstanten Maschenweiten $\Delta x, \Delta y$ verzichten und ein achsenparalleles Gitter mit unterschiedlichen Δx_i und Δy_j einführen. Oder man müsste zu einer 81×81 -Unterteilung übergehen.

Beispiel 2.1 (Notation). Ein Gitter mit 6×5 Gitterpunkten zusammen mit der Notation der Gitterpunkte ist in Abbildung 2.8 angegeben:

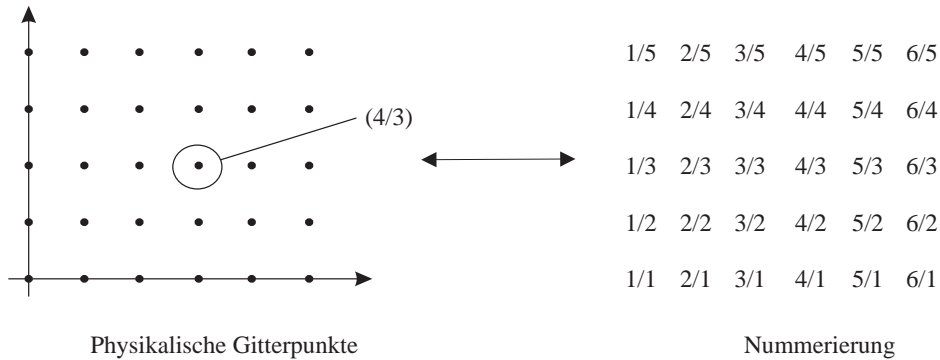


Abb. 2.8. Gitterpunkte und Nummerierung.

Links sind die Gitterpunkte dargestellt, rechts die Nummerierung dieser Gitterpunkte. Die Nummerierung beginnt links unten mit $(1/1)$. Der erste Index gibt die Position in einer horizontalen Linie (Spaltennummer) und der zweite Index die Liniennummer an. \square

2.3.2 Ersetzen der partiellen Ableitungen durch finite Differenzen

Nachdem die Geometrie durch ein diskretes Gitter erfasst ist, muss die Modellgleichung (= Laplace-Gleichung)

$$\Phi_{xx}(x, y) + \Phi_{yy}(x, y) = 0$$

auf diesen Gitterpunkten gelöst werden.

Aber gerade im zweidimensionalen Fall kann die partielle Differentialgleichung nicht exakt gelöst werden. Man muss daher auf Näherungsverfahren zurückgreifen. Folgen wir der Zusammenfassung des eindimensionalen Problems, ersetzen wir die kontinuierlichen Ableitungen in der Laplace-Gleichung durch finite Differenzen, um zur diskreten Laplace-Gleichung zu kommen.

Betrachten wir zunächst einen beliebigen Gitterpunkt (i, j) im Berechnungsgebiet. Dieser Gitterpunkt besitzt die Koordinaten (x_{ij}, y_{ij}) . Da die Laplace-Gleichung in jedem inneren Punkt des Gebietes gilt, ist sie auch im Punkt (x_{ij}, y_{ij}) gültig. An diesem Punkt ersetzen wir die kontinuierlichen Ableitungen Φ_{xx} und Φ_{yy} durch finite Differenzen:

$$\Phi_{xx}(x_{ij}, y_{ij}) \sim \frac{\Phi(x_{i-1,j}, y_{i-1,j}) - 2\Phi(x_{ij}, y_{ij}) + \Phi(x_{i+1,j}, y_{i+1,j})}{(\Delta x)^2}$$

und

$$\Phi_{yy}(x_{ij}, y_{ij}) \sim \frac{\Phi(x_{i,j-1}, y_{i,j-1}) - 2\Phi(x_{ij}, y_{ij}) + \Phi(x_{i,j+1}, y_{i,j+1})}{(\Delta y)^2},$$

wobei die Gitterpunkte folgende geometrische Anordnung besitzen.

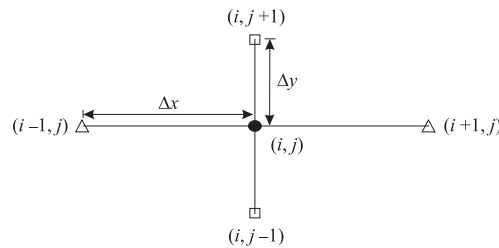


Abb. 2.9. Geometrische Anordnung des Differenzenoperators.

Wir setzen zur Abkürzung $\Phi_{ij} = \Phi(x_{ij}, y_{ij})$. Dann ist Φ_{ij} das Potenzial im Punkte (x_{ij}, y_{ij}) und wir können die diskrete Laplace-Gleichung an der Stelle (x_{ij}, y_{ij}) schreiben als

$$\Phi_{xx}(x_{ij}, y_{ij}) + \Phi_{yy}(x_{ij}, y_{ij}) \sim \frac{\Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\Phi_{i,j-1} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\Delta x)^2} \Phi_{i-1,j} - 2\left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\right) \Phi_{ij} + \frac{1}{(\Delta x)^2} \Phi_{i+1,j} \\ + \frac{1}{(\Delta y)^2} \Phi_{i,j-1} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \Phi_{i,j+1} = 0. \end{aligned}$$

(diskrete Laplace-Gleichung)

Diese Gleichung gilt für alle Punkte, die keine Randpunkte sind. Randpunkte sind aber nicht nur alle Punkte des äußeren Randes, sondern auch alle Punkte im Gebietsinneren, die Elektroden repräsentieren. Diese Randpunkte müssen getrennt behandelt werden. Im elektrostatischen Problem sind zwei unterschiedliche Typen von Randbedingungen zu betrachten:

Dirichlet-Randbedingung: Gilt für *Punkte* auf Elektroden; das Potenzial ist durch eine äußere Spannung vorgegeben. Im Falle des Drei-Elektroden-Systems sind dies die Punkte, die entweder auf Anodenspannung $\Phi_A = 10V$, auf Kathodenspannung $\Phi_K = 2V$ oder auf Zwischenspannung $\Phi_Z = 0V$ liegen.

Neumann-Randbedingung: Gilt für *Randlinien*, bei denen die Ableitung des Potentials vorgegeben ist. Im elektrostatischen Fall ist diese Ableitung senkrecht zum Isolator gleich Null. Dann nennt man die Randbedingung auch Symmetrie-Bedingung. Bei dem Drei-Elektroden-System nehmen wir an, dass die Elektroden durch ein dielektrisches Material voneinander isoliert sind. Die physikalische Bedingung für einen elektrischen Isolator ist, dass sich das elektrische Feld nur entlang aber nicht senkrecht zum Isolator ausbilden kann.

Am oberen und unteren Rand besitzt das elektrische Feld also keine Komponente in y -Richtung, d.h. die Potenziellinien verlaufen parallel zur y -Achse:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0.$$

Diskretisiert bedeutet dies für den unteren Rand

$$\Phi_y(x, y = 0) \sim \frac{\Phi_{i,2} - \Phi_{i,1}}{\Delta y} = 0$$

und für den oberen Rand

$$\Phi_y(x, y = 20) \sim \frac{\Phi_{i,j_{max}} - \Phi_{i,j_{max}-1}}{\Delta y} = 0.$$

Nimmt man alle Feld- und Randpunkte mit ihren Bestimmungsgleichungen zusammen, erhalten wir 41×41 lineare Gleichungen für die 41×41 Gitterpunkte. Dies ist wieder ein lineares Gleichungssystem für die Potenzialwerte Φ_{ij} an den Gitterpunkten (x_{ij}, y_{ij}) . Die Lösungen der Gleichungen sind dann die Potenzialwerte Φ_{ij} .

2.3.3 Aufstellen des linearen Gleichungssystems

Um die Struktur des Gleichungssystems besser zu erkennen, wählen wir im Folgenden ein 6×5 -Gitter und zählen die Gitterpunkte von links unten beginnend durch:

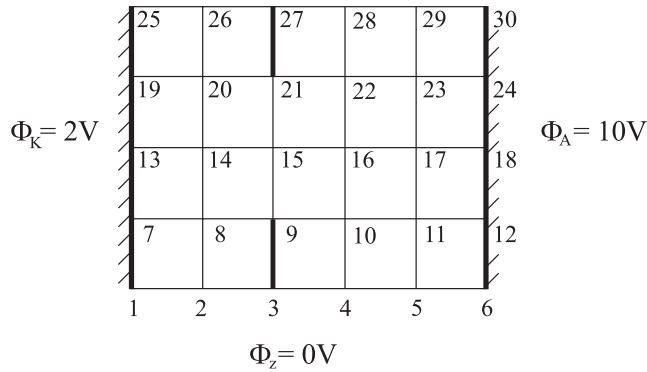
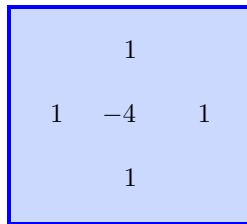


Abb. 2.10. Vereinfachtes Gitter.

Wir haben drei unterschiedliche Arten von Gitterpunkten

| | | |
|------------------|---------------------|--------------------------|
| Dirichlet-Punkte | 1, 7, 13, 19, 25 | Potenzial $\Phi_K = 2V$ |
| | 6, 12, 18, 24, 30 | Potenzial $\Phi_A = 10V$ |
| | 3, 9; 21, 27 | Potenzial $\Phi_A = 0V$ |
| Neumann-Punkte | 2, 4, 5; 26, 28, 29 | |
| Feld-Punkte | Rest | |

An den $6 \times 5 = 30$ Gitterpunkten stellen wir das LGS für das Potenzial Φ_{ij} auf. Der Einfachheit wegen setzen wir $\Delta x = \Delta y = 1$. Dann ist der diskrete Laplace-Operator an der Stelle (i, j) gegeben durch: Der Wert des Potenzials an der unteren Stelle $(i, j - 1)$ + Potenzial an der oberen Stelle $(i, j + 1)$ + Potenzialwert rechts $(i + 1, j)$ + links $(i - 1, j)$ minus 4 mal den Potenzialwert an der Stelle (i, j) . Dieser Sachverhalt wird kurz durch den **5-Sterne-Operator**



geometrisch beschrieben. Die Bilanz über alle Gitterpunkte ergibt

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|---|----|---|----|----|---|---|---|----|----|---|----|----|----|----|----|---|---|----|---|----|---|----|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|----------|----------|----------|
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_K | | |
| 2 | | -1 | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | | |
| 3 | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_Z | |
| 4 | | | | -1 | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| 5 | | | | | -1 | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| 6 | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_A | |
| 7 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_K | |
| 8 | | 1 | | | | | | 1 | -4 | 1 | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| 9 | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_Z | |
| 10 | | | 1 | | | | | | 1 | -4 | 1 | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| 11 | | | | 1 | | | | | | | 1 | -4 | 1 | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| 12 | | | | | 1 | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_A | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_K | |
| 14 | | | | | | 1 | | | | | | 1 | -4 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| 15 | | | | | | | 1 | | | | | | 1 | -4 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| 16 | | | | | | | | 1 | | | | | | 1 | -4 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| 17 | | | | | | | | | 1 | | | | | | 1 | -4 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| 18 | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_A | |
| 19 | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_K | |
| 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | -4 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| 21 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_Z | |
| 22 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | -4 | 1 | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| 23 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | 0 |
| 24 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | -4 | 1 | | | | | | | | | | | | ϕ_A | |
| 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | ϕ_K | |
| 26 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 |
| 27 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_Z |
| 28 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 |
| 29 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 |
| 30 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_A |

Dies ist das lineare Gleichungssystem, das im vierten Schritt durch geeignete Methoden gelöst wird.

2.3.4 Lösen des linearen Gleichungssystems durch geeignete Methoden

Das durch die Diskretisierung der Laplace-Gleichung aufgestellte lineare Gleichungssystem kann man bis auf Rundungsfehler z.B. durch den Gauß-Algorithmus lösen. Allerdings ist zu beachten, dass es bei höherer Gitterauflösung sehr viele Unbekannte enthält und zu sehr großen Systemen führt. Für ein 10×10 -Gitter hat man 100 Unbekannte, was zu einer 100×100 -Matrix führt. Für diese Matrix benötigt man dann schon 10000 Speichereinheiten. Die Nachteile des Gauß-Algorithmus liegen somit auf der Hand:

- Rundungsfehler sind dominant, da man bei jedem Eliminationsschritt die Koeffizienten der verbleibenden Matrix neu berechnet.
- Hohe Rechenzeiten, da die Rechenzeit der Elimination proportional zu $n!$ ist.
- Der Algorithmus verändert die Struktur der Matrix, da er in jedem Eliminationsschritt die Koeffizienten neu berechnet.
- Hoher Speicherbedarf; obwohl im ursprünglichen linearen Gleichungssystem viele der Koeffizienten zunächst Null sind, werden sie im Verlauf der Verfahrens geändert und durch Zahlen ungleich Null ersetzt. Damit muss im Wesentlichen die gesamte Matrix abgespeichert werden.

In der Praxis werden deshalb die linearen Gleichungssysteme meist mit **iterativen** Methoden gelöst. Drei der klassischen Iterationsverfahren werden wir in diesem Abschnitt skizzieren. Es stellt sich dabei heraus, dass sie einfacher zu handhaben sind als der Gauß-Algorithmus. Die iterativen Methoden haben aber den Nachteil, dass sie nicht für alle linearen Gleichungssysteme konvergieren, sondern nur für bestimmte für die Simulation aber relevanten! Durch diese Einschränkung werden diese Methoden in der Elementarmathematik in der Regel nicht behandelt. Einen Überblick über gängige Verfahren zum Lösen von großen linearen Gleichungssystemen findet man im Anhang A.

Wir betrachten im Folgenden ein lineares Gleichungssystem der Form

$$A\Phi = b$$

mit der $(n \times n)$ -Matrix A , der rechten Seite b und dem gesuchten Lösungsvektor Φ :

$$A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,n}; \quad b = (b_1, \dots, b_n)^t; \quad \Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)^t.$$

Das obige System besteht aus n Zeilen der Form

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\Phi_j = b_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

2.3.4.1 Allgemeines Iterationsverfahren. Wir lösen die i -te Gleichungen nach Φ_i auf (d.h. Gleichung 1 nach Φ_1 , Gleichung 2 nach Φ_2 , ..., Gleichung n nach Φ_n)

$$\Phi_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\Phi_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}\Phi_j \right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

und behandeln dieses System iterativ:

Wir geben uns eine Anfangsschätzung für die Lösung $(\Phi_1^0, \dots, \Phi_n^0)$ des linearen Gleichungssystems vor. Im $(m+1)$ -ten Schritt bestimmen wir eine Lösung über die Werte des m -ten Schritts durch die allgemeine Vorschrift

$$\Phi_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\Phi_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}\Phi_j^{(m)} \right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

(Jacobi-Verfahren)

Das Jacobi-Verfahren ist im Worksheet **Jacobi** sowohl direkt als auch in Form einer Prozedur programmiert.

2.3.4.2 Gauß-Seidel-Verfahren. Betrachtet man das Jacobi-Verfahren, so beginnt man bei der $(m+1)$ -ten Iteration mit der 1. Gleichung, um $\Phi_1^{(m+1)}$ durch die "alten" Werte $\Phi_1^{(m)}, \dots, \Phi_n^{(m)}$ zu berechnen. Anschließend wählt man Gleichung 2 und berechnet $\Phi_2^{(m+1)}$ aus den "alten" Daten $\Phi_1^{(m)}, \dots, \Phi_n^{(m)}$. Dabei kann man aber im Prinzip ausnutzen, dass $\Phi_1^{(m+1)}$ schon berechnet wurde. Man erhält also ein verbessertes Verfahren, indem man generell bei der Berechnung von $\Phi_i^{(m+1)}$ die schon aktualisierten Werte $\Phi_1^{(m+1)}, \dots, \Phi_{i-1}^{(m+1)}$ berücksichtigt:

$$\Phi_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \Phi_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \Phi_j^{(m)} \right) \quad i = 1, \dots, n$$

(Gauß-Seidel-Verfahren)

Das Gauß-Seidel-Verfahren ist im Worksheet **Gauß-Seidel** sowohl direkt als auch in Form einer Prozedur programmiert.

2.3.4.3 SOR-Verfahren. Das SOR-Verfahren (Successive Overrelaxation) beruht auf der Tatsache, dass die Konvergenz des Gauß-Seidel-Verfahrens erhöht werden kann, wenn man eine Linearkombination des alten Wertes $\Phi_i^{(m)}$ und des aktualisierten Wertes $\Phi_i^{(m+1)}$ wählt

$$\Phi_i^{(neu)} = w \cdot \Phi_i^{(m+1)} + (1-w) \cdot \Phi_i^{(m)}$$

(SOR-Verfahren)

Der Relaxationsparameter w liegt üblicherweise im Bereich $1 \leq w \leq 2$. Man kann zeigen, dass $0 < w < 2$ sein muss, da sonst keine Konvergenz erfolgt. Außerdem kann gezeigt werden, dass der optimale Relaxationsparameter gegeben ist durch $w_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}$ wenn ρ der größte Eigenwert der Jacobi-Matrix ist. Das SOR-Verfahren ist im Worksheet **SOR** sowohl direkt als auch in Form einer Prozedur programmiert.

2.3.4.4 Abbruchkriterium. All diesen Iterationsverfahren ist gemeinsam, dass die Iteration abgebrochen werden muss. Um ein *Abbruchkriterium* zu erhalten, bestimmt man nach jeder Iteration den Fehler.

Da das lineare Gleichungssystem nicht exakt gelöst wird, berechnet man in jedem Iterationsschritt nur eine Näherung $\Phi^{(m+1)}$. Damit ist $A \Phi^{(m+1)} \neq b$ bzw.

$$A \Phi^{(m+1)} - b \neq 0.$$

Die Einzelfehler nach der $(m+1)$ -ten Iteration sind somit gegeben durch

$$r_i^{(m+1)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Phi_j^{(m+1)} - b_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

bzw. der Gesamtfehler durch

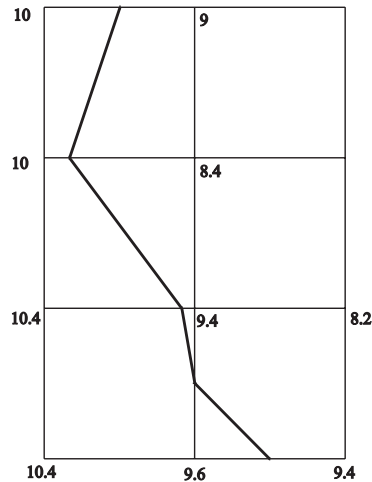
$$R^{(m+1)} = \max_{i=1, \dots, n} |r_i^{(m+1)}| \quad \text{(Residuum)}$$

Als Abbruchkriterium fordert man in der Regel, dass sowohl

- (1) das Residuum kleiner einer gewissen Vorgabe ist, $R^{(m+1)} < \delta_1$, als auch dass
- (2) die Differenz der Werte zweier aufeinander folgender Iterationen kleiner einer vorgegebenen Schranke ist

$$\max_{i=1, \dots, n} |\Phi_i^{(m+1)} - \Phi_i^{(m)}| < \delta_2.$$

2.3.5 Lineare Interpolation



Durch Lösen des linearen Gleichungssystems z.B. mit iterativen Verfahren erhält man die gesuchte Lösung näherungsweise an den Gitterpunkten. D.h. die Lösung wird repräsentiert durch Werte $\Phi_{i,j}$ an den Gitterpunkten $(x_{i,j}, y_{i,j})$. Zur Interpretation dieser numerischen Daten führt man Äquipotenziallinien ein. Dies sind Linien, auf denen sich der Wert des Potentials nicht ändert. Das Problem dabei ist, wie man aus den berechneten Daten auf den Gitterpunkten zu diesen Äquipotenziallinien kommt.

Zur Klärung dieser Frage betrachten wir Abbildung 2.11.

Abb. 2.11. Konstruktion der 9.5-Volt-Linie. Vorgegeben sind die Potenzialwerte an den Gitterpunkten. Gesucht ist z.B. die 9.5-Volt-Linie. Um diese Linie zu finden, wählt man sich einen Eckpunkt im Gitter (hier links oben mit 10 V) und betrachtet die beiden angrenzenden Zell-Ecken (10 V nach unten; 9 V nach rechts). Damit ist klar, dass die 9.5-Volt-Linie durch die obere Gitterlinie geht. Lineare Interpolation besagt, dass sie genau durch die Mitte geht. D.h. die 9.5-Volt-Linie startet an der oberen Zell-Linie in der Mitte.

Anschließend werden alle weiteren Linien dieser Zelle untersucht und entschieden, ob die 9.5-Volt-Linie durch eine dieser Linien geht. In unserem Fall ist dies die untere Zellbegrenzung. Lineare Interpolation legt auf dieser unteren Linie den Wert 9.5 V fest. Auf die gleiche Weise wird nun die zweite Zelle durchsucht und die Schnittpunkte der 9.5-Volt-Linie mit den Zellbegrenzungen bestimmt. Somit kommt die 9.5-Volt-Linie von der obersten Zelle durch die zweite Zelle bis hin zur untersten Zelle. Dort wird festgestellt, dass die Linie in die rechte Zelle geht usw.

Analog zum oben beschriebenen Verfahren bestimmt man auch die 10-Volt-, 9-Volt- bzw. 8.5-Volt-Linie usw. In Abbildung 2.12 (a) sind diese Linien eingezeichnet. Kommerziell erhältliche Programme färben die Lösungsdarstellungen zusätzlich farblich ein, wie dies in Abbildung 2.12 (b) in Grautönen zu sehen ist. Dies liefert aber keine zusätzlichen Informationen, die nicht schon durch die Äquipotenziallinien gegeben sind. Lediglich die Bereiche zwischen zwei Äquipotenziallinien werden mit einer Farbe gefüllt. Die eigentliche Information ist durch die Bereichsgrenzen also Äquipotenziallinien gegeben.

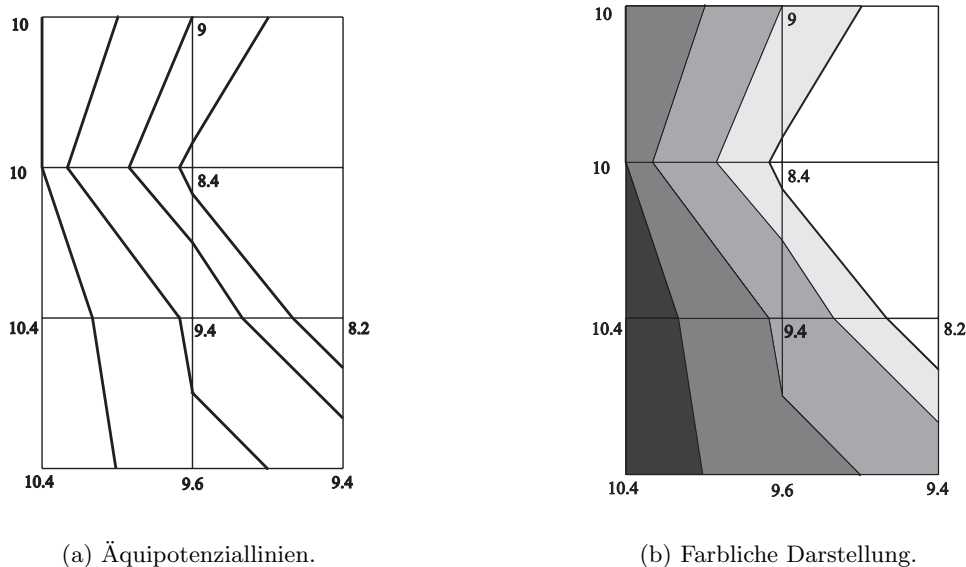


Abb. 2.12. Darstellung der Lösung.

Beispiel 2.2 (Mit MAPLE). In Abbildung 2.13 ist die Lösung für das Drei-Elektroden-System auf einem 41×41 -Gitter dargestellt. In den beiden Diagrammen sind die Äquipotenziallinien für die Randbedingungen ($\Phi_A = 10V, \Phi_K = 4V$ und $\Phi_Z = 0V$) bzw. ($\Phi_A = 10V, \Phi_K = 2V$ und $\Phi_Z = 0V$) dargestellt. Man beachte, dass der einzige Unterschied im Kathodenpotential liegt: In Abbildung 2.13 (a) ist das Kathodenpotential $\Phi_K = 4V$ und in 2.13 (b) $\Phi_K = 2V$.

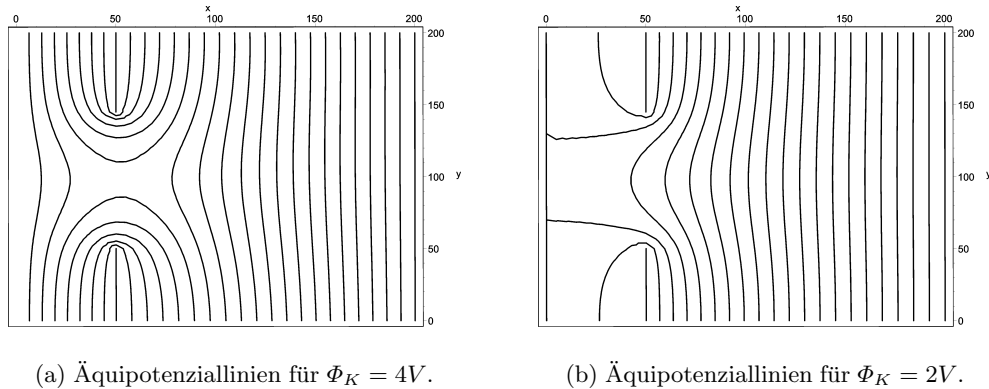


Abb. 2.13. Numerische Lösung für das Drei-Elektroden-System.

Man erkennt im Vergleich der beiden Darstellungen sehr schön, dass eine kleine Änderung der Randbedingungen (der einzige Unterschied liegt in Φ_K) den qualitativen Verlauf der Lösung grundlegend ändert. Im zweiten Fall erhält man einen sog. Durchbruch der Potenzielllinien, der im ersten nicht möglich ist. \square

Zusammenfassung: Finite Differenzenmethode.

Wie im eindimensionalen Fall besteht die finite Differenzenmethode auch im zweidimensionalen Fall aus fünf Schritten:

- (1) **Ersetzen der Geometrie durch diskrete Punkte:** Die Geometrie wird durch ein zweidimensionales strukturiertes Berechnungsgitter repräsentiert.
- (2) **Ersetzen der partiellen Ableitungen durch finite Differenzen:** Die partiellen Ableitungen der Differentialgleichung werden durch finite Differenzen approximiert. So kommt man bei linearen partiellen Differentialgleichungen zu linearen Differenzgleichungen.
- (3) **Aufstellen des zugehörigen LGS:** Das lineare Gleichungssystem enthält genau so viele Gleichungen wie Unbekannte (= Anzahl der Gitterpunkte).
- (4) **Lösen des LGS mit einer geeigneten Methode:** In der Regel werden die durch finite Differenzenverfahren entstehenden linearen Gleichungen durch iterative Methoden gelöst.
- (5) **Lineare Interpolation zwischen den diskreten Punkten:** Durch das numerische Lösen der Differenzgleichungen erhält man die Lösung an den Gitterpunkten. Durch lineare Interpolation erhält man hieraus die Äquipotenziallinien.

2.4 Verallgemeinerung

Durch die Differenzenmethode ist man prinzipiell in der Lage partielle Differenzialgleichungen in den Ortskoordinaten x, y , und z auf achsenparallelen Gittern zu diskretisieren. Für lineare Differenzialgleichungen führt die Diskretisierung auf ein lineares Gleichungssystem, das man in der Regel mit iterativen Methoden löst.

Beispiel 2.3. Am Beispiel der partiellen Differenzialgleichung

$$4\Phi_x + \Phi + 3\Phi_{xx} + 4\Phi_{yy} = 10$$

werden wir aufzeigen, dass die Differenzenmethode auch auf eine solche Differenzialgleichung anwendbar ist.

Zunächst stellen wir fest, dass die Diskretisierung der Differenzialgleichung unabhängig von der Geometrie ist, denn die Geometrie wird repräsentiert durch das diskrete, strukturierte Gitter. Dies bedeutet, dass jeder innere Gitterpunkt einen unteren, oberen, linken und rechten Nachbarpunkt besitzt. Wir können bei der Diskretisierung also auf diese Gitterpunkte zurückgreifen.

Wir erstellen für die Ableitungen

$$4\Phi_x + \Phi + 3\Phi_{xx} + 4\Phi_{yy}$$

im Punkt (i, j) den zugehörigen finiten Differenzenausdruck und geben für $\Delta x = \Delta y = 1$ die geometrische Anordnung des Differenzenoperator an.

$$\begin{aligned} 4\Phi_x(i, j) &\sim \frac{1}{\Delta x}(2\Phi_{i+1, j} - 2\Phi_{i-1, j}) \\ 3\Phi_{xx}(i, j) &\sim \frac{1}{\Delta x^2}(3\Phi_{i+1, j} - 6\Phi_{i, j} + 3\Phi_{i-1, j}) \\ 4\Phi_{yy}(i, j) &\sim \frac{1}{\Delta y^2}(4\Phi_{i, j+1} - 8\Phi_{i, j} + 4\Phi_{i, j-1}). \end{aligned}$$

Setzen wir diese Näherungen für die Ableitungen in die Differenzialgleichung ein, erhalten wir im Punkt (i, j)

$$\begin{aligned} 4\Phi_x + \Phi + 3\Phi_{xx} + 4\Phi_{yy} &\sim \frac{1}{\Delta x}(2\Phi_{i+1, j} - 2\Phi_{i-1, j}) \\ &\quad + \Phi_{i, j} \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x^2}(3\Phi_{i+1, j} - 6\Phi_{i, j} + 3\Phi_{i-1, j}) \\ &\quad + \frac{1}{\Delta y^2}(4\Phi_{i, j+1} - 8\Phi_{i, j} + 4\Phi_{i, j-1}) = 10. \end{aligned}$$

Zur übersichtlicheren Schreibweise setzen wir für $\Delta x = \Delta y = 1$. Dann erhalten wir im Punkt (i, j)

$$4\Phi_{i,j-1} + 1\Phi_{i-1,j} - 13\Phi_{i,j} + 5\Phi_{i+1,j} + 4\Phi_{i,j+1} = 10.$$

Dieser Sachverhalt wird wieder kurz durch einen 5-Sterne-Operator

| | | |
|---|-----|---|
| | 4 | |
| 1 | -13 | 5 |
| | 4 | |

dargestellt.

Soll die partielle Differentialgleichung für das Gebiet aus Abbildung 2.10 gelöst werden, so erhalten wir für die angegebenen Randbedingungen das folgende lineare Gleichungssystem für die Lösung auf den Gitterpunkten:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|---|----|----|---|---|---|-----|---|-----|-----|---|---|-----|---|-----|---|-----|-----|---|---|---|-----|-----|-----|---|--|--|----------|--|--|----|----------|----------|
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_K | | | | | |
| 2 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 |
| 3 | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_Z |
| 4 | | | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| 5 | | | | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| 6 | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_A | |
| 7 | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_K | |
| 8 | 4 | | | | | | 1 | -13 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 10 | |
| 9 | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_Z | |
| 10 | | | 4 | | | | | | 1 | -13 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 10 | |
| 11 | | | | 4 | | | | | | 1 | -13 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 10 | |
| 12 | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_A | |
| 13 | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_K | |
| 14 | | | | | | | | | | | | | 1 | -13 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | 10 | | |
| 15 | | | | | | | | | | | | | | | 1 | -13 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | 10 | |
| 16 | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | -13 | 5 | | | | | | | | | | | | | | 10 | |
| 17 | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | -13 | 5 | | | | | | | | | | | | | 10 | |
| 18 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | ϕ_A | |
| 19 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | ϕ_K | |
| 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | -13 | 5 | | | | | | | | 10 | | |
| 21 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | ϕ_Z | |
| 22 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | -13 | 5 | | | | | | | 10 | | |
| 23 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | -13 | 5 | | | | | | | 10 | |
| 24 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | ϕ_A | |
| 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_K | |
| 26 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| 27 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ϕ_Z | |
| 28 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| 29 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| 30 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | ϕ_A |

Dieses lineare Gleichungssystem wird im vierten Schritt durch iterative Methoden gelöst. Anschließend wird im fünften Schritt durch lineare Interpolation die Lösung graphisch in Form von Äquipotenziallinien dargestellt.

2.5 Aufgaben zur finiten Differenzenmethode

2.1 Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y''(x) + y(x) = 0,$$

die auf dem Intervall $[0, 5]$ mit den Randwerten $y(0) = 1$ und $y(5) = 0$ numerisch mit der finiten Differenzenmethode gelöst werden soll.

- Unterteilen Sie das Intervall $[0, 5]$ in 5 Teilintervalle und stellen Sie das lineare Gleichungssystem für die Unbekannten $y_i = y(i)$ für $i = 1, \dots, 4$ auf.
- Lösen Sie das LGS und skizzieren Sie die Lösung.

2.2 Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y''(x) + y'(x) = 0,$$

die auf dem Intervall $[0, 5]$ mit den Randwerten $y(0) = 1$ und $y(5) = 0$ numerisch mit der finiten Differenzenmethode gelöst werden soll.

- Unterteilen Sie das Intervall $[0, 5]$ in 5 Teilintervalle und stellen Sie das lineare Gleichungssystem für die Unbekannten $y_i = y(i)$ für $i = 1, \dots, 4$ auf.
- Lösen Sie das LGS und skizzieren Sie die Lösung.

2.3 Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Lösen Sie das LGS iterativ mit der Jacobi-Methode, indem Sie vier Iterationsschritte ausführen. Der Startvektor sei $y^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$.
- Lösen Sie das LGS, indem Sie einen Iterationsschritt mit dem Gauß-Seidel-Verfahren durchführen.

2.4 Gegeben ist das Potenzialproblem

$$\Phi_{xx}(x, y) + \Phi_{yy}(x, y) = 0,$$

welches für die nachfolgende Geometrie (vgl. Abb. 2.14 (a)) numerisch mit der finiten Differenzenmethode gelöst werden soll.

- Spezifizieren Sie für jeden Gitterpunkt den Typ (Dirichlet-, Neumann- oder Feldpunkt).
- Erstellen Sie das zugehörige LGS zum Lösen der Potenzialgleichung unter der Annahme, dass $\Delta x = \Delta y = 1$. (vgl. Abb. 2.14 (b))
- Skizzieren Sie eine mögliche Lösung, indem Sie vier Äquipotenziallinien in Abb. 2.14 (a) qualitativ einzeichnen.

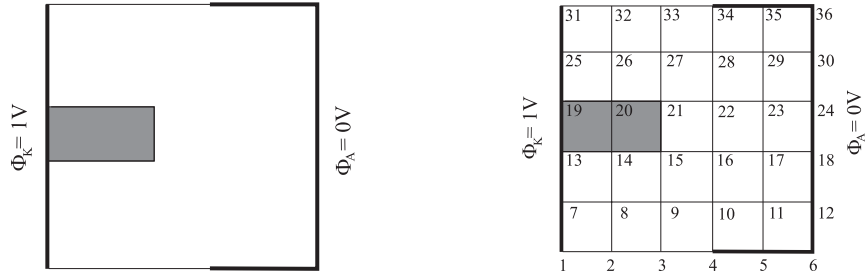


Abb. 2.14. Potenzialproblem.

2.5 Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$\Phi_{xx}(x, y) - 4\Phi_x(x, y) + 2\Phi_y(x, y) + \Phi_{yy}(x, y) = 16,$$

die für das Gebiet in Abb. 2.14 numerisch mit der finiten Differenzenmethode gelöst werden soll. Erstellen Sie das zugehörige LGS zum Lösen der Potenzialgleichung unter der Annahme, dass $\Delta x = \Delta y = 1$.

2.6 Gegeben ist ein achsenparalleles äquidistantes Gitter mit den Abständen $\Delta x = \Delta y = 1$. Erstellen Sie finite Differenzenausdrücke für die Ableitungen

$$f_x, f_y, f_{xy}, f_{xxyy},$$

wenn die Funktion f_{ij} nur an den Gitterpunkten (i, j) gegeben ist. Skizzieren Sie im Gitter, welche Punkte für die Berechnung der jeweiligen Ableitung mit einbezogen werden müssen. Wie sind die zugehörigen Gewichte?

*2.7 Lösen Sie folgende Problemstellung, indem Sie das zugehörige MAPLE-Worksheet verwenden:

- a) Führen Sie für ein Zwei-Elektroden-System ohne Zwischenelektrode ein (6×5) -Gitter ein (siehe Abb. 2.10) und erstellen Sie mit der finiten Differenzenmethode das zugehörige lineare Gleichungssystem ($\Phi_A = 10V; \Phi_K = 2V$).
- b) Lösen Sie das unter (a) erhaltene lineare Gleichungssystem mit dem Jacobi-Verfahren, dem Gauß-Seidel-Verfahren und dem SOR-Verfahren ($w = 1.3$).
- c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für das Drei-Elektroden-System mit Zwischenelektrode ($\Phi_A = 10V, \Phi_K = 2V, \Phi_Z = 0V$) mit dem Jacobi-Verfahren, dem Gauß-Seidel-Verfahren und dem SOR-Verfahren.

*2.8 Gegeben ist die Poisson-Gleichung im Innern des Einheitsquadrates I^2

$$\begin{aligned} -u_{xx} - u_{yy} &= -x^2 - y^2 + x + y \\ u(x, y) &= 0 \quad \text{auf dem Rand von } I^2. \end{aligned}$$

Die exakte Lösung ist gegeben durch $u(x, y) = \frac{1}{2} x(x - 1)y(y - 1)$.

- a) Lösen Sie die partielle Differentialgleichung mit der Differenzenmethode für die Werte $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{10}, \Delta x = \Delta y = \frac{1}{20}, \Delta x = \Delta y = \frac{1}{40}, \Delta x = \Delta y = \frac{1}{100}$.
- b) Vergleichen Sie die numerische Lösung mit der exakten Lösung. Welche Aussagen über die Genauigkeit kann man in Abhängigkeit der Schrittweite machen?